

به نام او، به یاد او، برای او

محاسبات علمی

حل دستگاه معادلات خطی

روش حذفی گاوس

Dr. Ali Valinejad

valinejad.ir

valinejad@umz.ac.ir

University of Mazandaran



فهرست مطالب

- ❖ دستگاه معادلات خطی
- ❖ وجود جواب برای دستگاه معادلات خطی
- ❖ دستگاه‌های معادلات خطی هم ارز
- ❖ دسته‌بندی روش‌های عددی برای حل دستگاه معادلات خطی
- ❖ روش حذفی گاوس ساده
- ❖ روش جایگزینی پسرو برای حل دستگاه بالامثلی $Ux=b$
- ❖ روش جایگزینی پیشرو برای حل دستگاه پایین مثلثی $Lx=b$



دستگاه معادلات خطی

دستگاه معادلات خطی با m معادله و n مجهول:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$$

شکل ماتریسی دستگاه معادلات خطی با m معادله و n مجهول:

$$Ax = b \quad \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_b$$

چند نکته:

الف) اگر $m = n$ ، دستگاه را **همواره معین** (Everdetermined) نامند.

ب) اگر $m < n$ ، دستگاه را **افرو معین** (Underdetermined) نامند.

ج) اگر $m > n$ ، دستگاه را **افرا معین** (Overdetermined) گویند.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

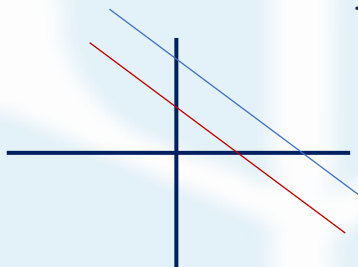
وجود جواب برای دستگاه معادلات خطی

حالت های مختلف وجود جواب برای دستگاه معادلات خطی $Ax = b$:

الف) دستگاه معادلات **ناسازگار** و **بدون جواب** است.

$$2x_1 + 3x_2 = 6$$

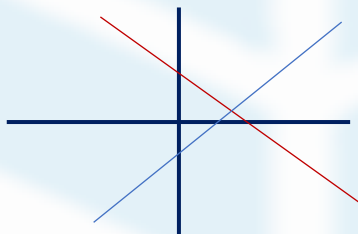
$$4x_1 + 6x_2 = 10$$



ب) دستگاه معادلات **سازگار** و دارای جواب **منحصر بفرد** است.

$$2x_1 + 3x_2 = 6$$

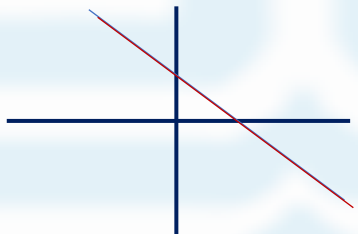
$$-1x_1 + 1x_2 = -1$$



ج) دستگاه معادلات **سازگار** و دارای **بیشمار جواب** است.

$$2x_1 + 3x_2 = 12$$

$$4x_1 + 6x_2 = 24$$



وجود جواب برای دستگاه معادلات خطی

حالت های مختلف وجود جواب برای دستگاه معادلات خطی $Ax = b$:

الف) دستگاه معادلات **ناسازگار** و **بدون جواب** است.

ب) دستگاه معادلات **سازگار** و دارای جواب **منحصربفرد** است.

ج) دستگاه معادلات **سازگار** و دارای **بیشمار جواب** است.

چند نکته در باره وجود جواب برای دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ برای حالتی که $m = n$:

الف) اگر $|A| \neq 0$ ، دستگاه معادلات **سازگار** و دارای جواب **منحصربفرد** است.

$$2x_1 + 3x_2 = 6$$

$$-1x_1 + 1x_2 = -1$$

ب) اگر $|A| = 0$ و دستگاه معادلات **سازگار** باشد، **بیشمار جواب** دارد.

$$2x_1 + 3x_2 = 12$$

$$4x_1 + 6x_2 = 24$$

ج) اگر $|A| = 0$ و دستگاه معادلات **ناسازگار** باشد، **بدون جواب** است.

$$2x_1 + 3x_2 = 6$$

$$4x_1 + 6x_2 = 10$$



دستگاه معادلات خطی هم ارز

تعریف دستگاه معادلات خطی هم ارز:

دو دستگاه معادلات خطی را هم ارز گویند، اگر دقیقاً یک مجموعه جواب یکسان داشته باشند.

مثال:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = -3 \end{cases}$$

مجموعه جواب: $\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$



$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 2 \\ -7x_2 = -7 \end{cases}$$

مجموعه جواب: $\begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$



دسته‌بندی روش‌های عددی برای حل دستگاه معادلات خطی

به طور کلی، روش‌های عددی برای حل دستگاه معادلات خطی را می‌توان به دو دسته اصلی زیر تقسیم نمود:

روش‌های مستقیم:

این دسته از روش‌ها، در صورت عدم وجود خطای گرد کردن، جواب دقیق دستگاه معادلات خطی را در یک تعداد متناهی مرحله محاسبه می‌کنند. بعضی از مهمترین روش‌های مستقیم عبارتند از: روش کرامر، معکوس ماتریس، روش حذفی گوس ساده و ...

روش‌های تکراری:

این دسته از روش‌ها، به صورت تکراری به محاسبه تقریبی از جواب دستگاه معادلات خطی می‌پردازند. روش‌های تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی با ماتریس ضرائب بزرگ مقیاس مفیدند. بعضی از مهمترین روش‌های تکراری عبارتند از: روش ژاکوبی، روش گوس سایدل و...



حل دستگاه معادلات خطی

روش حذفی گاوس ساده

روش حذفی گاوس دستگاه $Ax = b$ را به یک دستگاه هم ارزی تبدیل می‌کند که پیدا کردن جواب آن آسانتر است.

گام ۱: تشکیل ماتریس افزوده

گام ۲: تبدیل ماتریس افزوده به یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی

گام ۱: تشکیل ماتریس افزوده

$$Ax = b \quad \longrightarrow \quad [A : b]$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

ماتریسی با m سطر و $n+1$ ستون



حل دستگاه معادلات خطی

روش حذفی گاوس ساده

روش حذفی گاوس دستگاه $Ax = b$ را به یک دستگاه هم ارزی تبدیل می‌کند که پیدا کردن جواب آن آسانتر است.

گام ۱: تشکیل ماتریس افزوده

گام ۲: تبدیل ماتریس افزوده به یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی

گام ۳: تبدیل ماتریس افزوده به یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی

با استفاده از عملیات سطری مقدماتی، ماتریس افزوده به ماتریسی با خواص زیر تبدیل شود:

□ هر سطر غیر صفر بالای همه سطرهای صفر قرار گیرد

□ عناصر پیشرو به شکل پلکانی قرار گیرند

□ ستون‌های شامل عناصر پیشرو به بردارهای استاندارد تبدیل شوند



حل دستگاه معادلات خطی

روش حذفی گاوس ساده

روش حذفی گاوس دستگاه $Ax = b$ را به یک دستگاه هم ارزی تبدیل می‌کند که پیدا کردن جواب آن آسانتر است.

گام ۱: تشکیل ماتریس افزوده

گام ۲: تبدیل ماتریس افزوده به یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \end{aligned}$$



هم ارز

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$



$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

عناصر پیشرو



ماتریس سطری پلکانی



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس تحویل شده
سطری پلکانی



حل دستگاه معادلات خطی

روش حذفی گاوس ساده

روش حذفی گاوس دستگاه $Ax = b$ را به یک دستگاه هم ارزی تبدیل می کند که پیدا کردن جواب آن آسانتر است.

گام ۱: تشکیل ماتریس افزوده

گام ۲: تبدیل ماتریس افزوده به یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی

$$\begin{array}{l} 1x_1 + 2x_2 - 1x_3 + 2x_4 + 1x_5 = 2 \\ -1x_1 - 2x_2 + 1x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 0x_5 = 3 \\ -3x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 3x_5 = 9 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{هم ارز} \\ \longleftrightarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \\ x_3 \\ -x_5 = 2 \\ = -3 \\ x_4 + x_5 = 2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & -3 & 2 & 0 & 3 \\ -3 & -6 & 2 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

ماتریس تحویل شده
سطری پلکانی

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



حل دستگاه معادلات خطی

روش حذفی گاوس ساده

$$\begin{array}{rcl} 1x_1 + 2x_2 - 1x_3 + 2x_4 + 1x_5 & = & 2 \\ -1x_1 - 2x_2 + 1x_3 + 2x_4 + 3x_5 & = & 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 0x_5 & = & 3 \\ -3x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 3x_5 & = & 9 \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{هم ارز} \\ \longleftrightarrow \end{array} \quad \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & & -x_5 = 2 \\ & x_3 & = -3 \\ & x_4 + x_5 & = 2 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} x_1 = 2 - 2x_2 + x_5 \\ x_3 = -3 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{array}$$

متغیرهای x_2 و x_5 را متغیرهای آزاد و متغیرهای x_1 ، x_3 و x_4 را متغیرهای وابسته نامند.



روش جایگزینی پسرو برای حل دستگاه بالامثلثی $Ux=b$

بطور کلی یک دستگاه معادلات خطی با n معادله و n مجهول را می‌توان به یک دستگاه بالامثلثی هم‌ارز با آن تبدیل نمود، اگر معادله i ام ($i=1,2,\dots,n$) تنها به مجهولات $x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ وابسته باشد.

برای حل دستگاه بالامثلثی می‌توان از روش جایگزینی پسرو استفاده نمود

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$x_n = \frac{b_n}{u_{nn}}$$

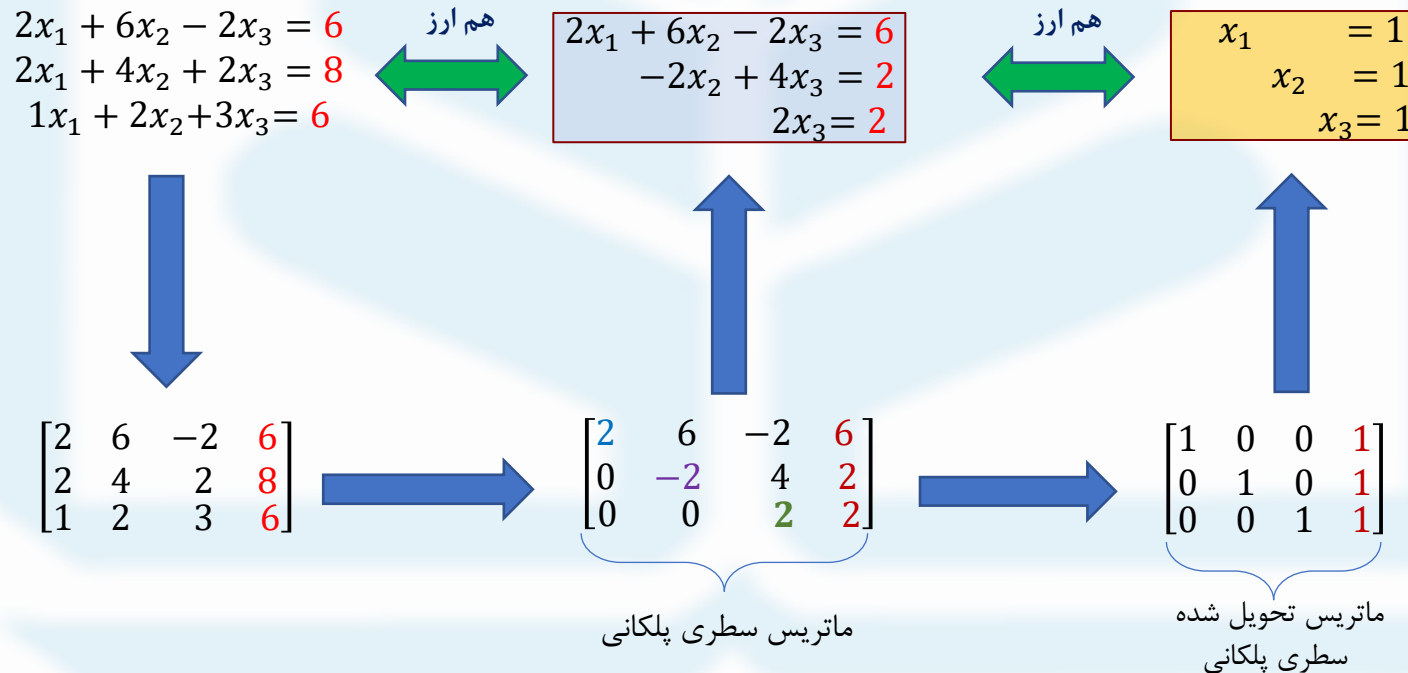
$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j}{u_{ii}}, \quad \text{for } i = n-1, \dots, 1$$

```
n = length(b);  
x(n)=b(n) / U(n,n)  
  
for i=n-1:-1:1  
    x(i) = b(i);  
    for j=(i+1):1:n  
        x(i) = x(i) - U(i,j)*x(j);  
    end  
    x(i) = x(i) / U(i, i);  
end
```



روش جایگزینی پسرو برای حل دستگاه بالامثلثی $Ux=b$

مثال: با استفاده از روش حذفی گاوس دستگاه زیر را به یک دستگاه بالامثلثی هم ارز تبدیل نموده و سپس با استفاده از الگوریتم جایگزینی پسرو، دستگاه حاصل را حل نمایید.



روش جایگزینی پسرو برای حل دستگاه بالامثلثی $Ux=b$

(ادامه)

مثال: با استفاده از روش حذفی گاوس دستگاه زیر را به یک دستگاه بالامثلثی هم ارز تبدیل نموده و سپس با استفاده از الگوریتم جایگزینی پسرو، دستگاه حاصل را حل نمایید.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \end{aligned}$$

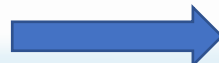
هم ارز



$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 6 \\ -2x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$



$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

ماتریس سطری پلکانی

```
for j=1:n
    for i=j+1:n
        mij=aij/aii
        for k=j+1:n
            aij=aik - mij ajk
        end
        bi=bi - mij bj
    end
end
```



روش جایگزینی پسرو برای حل دستگاه بالامثلثی $Ux=b$

(ادامه)

مثال: با استفاده از روش حذفی گاوس دستگاه زیر را به یک دستگاه بالا مثلثی هم ارز تبدیل نموده و سپس با استفاده از الگوریتم جایگزینی پسرو، دستگاه حاصل را حل نمایید.

$$2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 6$$

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8$$

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$



$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 & = & 6 \\ -2x_2 + 4x_3 & = & 2 \\ 2x_3 & = & 2 \end{array}$$



```
n = length(b);  
x(n)=b(n) / U(n,n)  
  
for i=n-1:-1:1  
    x(i) = b(i);  
    for j=(i+1):1:n  
        x(i) = x(i) - U(i,j)*x(j);  
    end  
    x(i) = x(i) / U(i, i);  
end
```

$$x_3 = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{2 - 4(1)}{-2} = 1$$

$$x_1 = \frac{6 - 6(1) + 2(1)}{2} = 1$$

نکته:

شرط اتمام الگوریتم جایگزینی پسرو در این است که عناصر قطری ماتریس U همگی غیر صفر باشند. چنان چه حداقل یکی از عناصر قطری صفر باشد، دترمینان ماتریس ضرائب صفر می شود و در نتیجه دستگاه $Ux=b$ جواب منحصر بفرد نخواهد داشت.



روش جایگزینی پیشرو برای حل دستگاه پایین مثلثی $Lx=b$

برای حل دستگاه پایین مثلثی می‌توان از روش جایگزینی پیشرو استفاده نمود

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}x_j}{l_{ii}}, \quad \text{for } i = 2, 3, \dots, n$$

```
n = length(b);
x(n)=b(1) / L(1,1)

for i=2:n
    x(i) = b(i);
    for j=1:i-1
        x(i) = x(i) - L(i,j)*x(j);
    end
    x(i) = x(i) / L(i, i);
end
```

نکته:

شرط اتمام الگوریتم جایگزینی پیشرو در این است که عناصر قطری ماتریس L همگی غیر صفر باشند. چنان چه حداقل یکی از عناصر قطری صفر باشد، دترمینان ماتریس ضرائب صفر می‌شود و در نتیجه دستگاه $Lx=b$ جواب منحصر بفرد نخواهد داشت.



مراجع

- 1- ***Numerical Linear Algebra and Applications***, Biswa Nath Datta, 1995.
- 2- ***<https://www.slideserve.com>***
- 3- ***http://speech.ee.ntu.edu.tw/~tlkagk/courses_LA19.html***
- 4- ***<http://mathonline.wikidot.com/gaussian-elimination-and-back-substitution>***
- 5- ***<https://www.math.usm.edu/lambers/mat610/sum10>***