

به نام او، به یاد او، برای او

جبر خطی عددی

مساله کمترین مربعات خطی

Dr. Ali Valinejad

valinejad@umz.ac.ir

University of Mazandaran

دستگاه معادلات خطی

دستگاه معادلات خطی با m معادله و n مجهول:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$$

شکل ماتریسی دستگاه معادلات خطی با m معادله و n مجهول:

$$Ax = b$$
$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_b$$

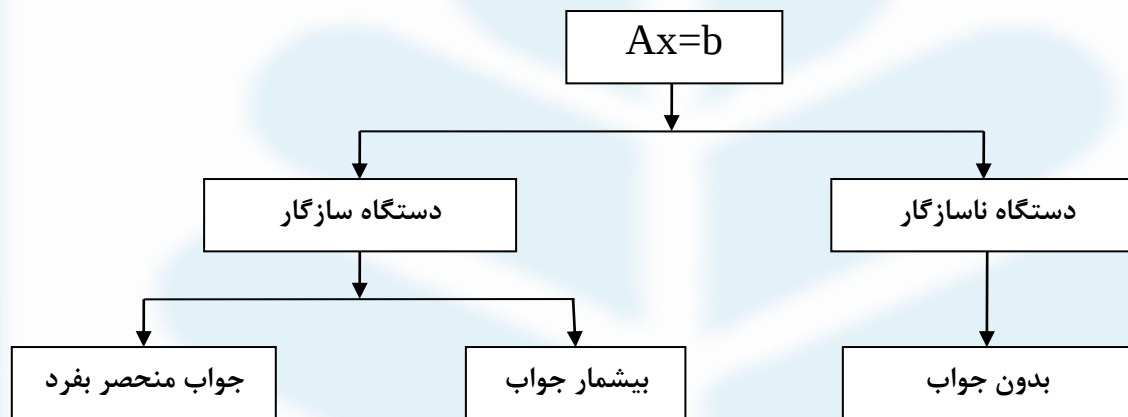
چند نکته:

الف) اگر $m = n$ ، دستگاه را **همواره معین** (Everdetermined) نامند.

ب) اگر $m < n$ ، دستگاه را **افرو معین** (Underdetermined) نامند.

ج) اگر $m > n$ ، دستگاه را **افرا معین** (Overdetermined) گویند.

دستگاه معادلات خطی



دستگاه معادلات خطی

تمرین: جدول زیر، سرعت رو به بالای یک راکت را در سه نقطه مختلف از بازه زمانی ۵ تا ۱۲ ثانیه ($5 \leq t \leq 12$) نشان می دهد. داده سرعت با استفاده از چندجمله ای $v(t) = at^2 + bt + c$ تقریب زده شده است.

Time, t (s)	Velocity, v (m/s)
5	106.8
8	177.2
12	279.2

دستگاه معادله ای بنویسید که با حل آن بتوان ضرایب a ، b و c را محاسبه نمود.

حل: چند جمله ای $v(t) = at^2 + bt + c$ باید از سه نقطه (t_1, v_1) ، (t_2, v_2) و (t_3, v_3) عبور کند که با توجه به داده های جدول:

$$t_1 = 5, \quad v_1 = 106.8$$

$$t_2 = 8, \quad v_2 = 177.2$$

$$t_3 = 12, \quad v_3 = 279.2$$

لذا،

$$v(t_1) = at_1^2 + bt_1 + c$$

$$25a + 5b + c = 106.8$$

$$v(t_2) = at_2^2 + bt_2 + c$$

$$64a + 8b + c = 177.2$$

$$v(t_3) = at_3^2 + bt_3 + c$$

$$144a + 12b + c = 279.2$$

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات خطی

- ❖ با مفروض بودن ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ و بردار $b \in \mathbb{R}^n$ ، آیا دستگاه $Ax = b$ همیشه دارای جواب است.
- ❖ در صورت وجود جواب، آیا این جواب یکتاست؟
- ❖ چگونه می توان این جواب را محاسبه کرد.

بیان مساله کمترین مربعات خطی

با مفروض بودن ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ و بردار $b \in \mathbb{R}^n$ ، هدف از مساله کمترین مربعات خطی یافتن برداری نظیر $x \in \mathbb{R}^n$ است به طوری که تابع $\|r(x)\| = \|Ax - b\|_2$ کمینه شود.

به برداری که به ازای آن، مساله کمترین مربعات خطی دارای مقدار کمینه برای تابع $\|r(x)\| = \|Ax - b\|_2$ است، **جواب کمترین مربعات** گویند.

در صورتی که مساله کمترین مربعات خطی بیش از یک جواب داشته باشد، به جوابی که دارای نرم اقلیدسی کمینه است، **جواب نرم کمینه** یا **جواب طول کمینه** گویند.

جواب نرم کمینه برای دستگاه فرومیین با رتبه کامل (با استفاده از معادلات نرمال)

قضیه (وجود و یکتایی جواب برای یک دستگاه فرومیین): اگر ماتریس A از رتبه کامل باشد، آن گاه $x = A^T(AA^T)^{-1}b$ جواب نرم کمینه از دستگاه فرومیین $Ax = b$ است.
اثبات: (Numerical Linear Algebra and Applications, Biswa Nath Datta, 1995.)

الگوریتم محاسبه جواب نرم کمینه برای مساله فرومیین با رتبه کامل با استفاده از معادلات نرمال

گام ۱: حل دستگاه $AA^T y = b$

گام ۲: محاسبه جواب نرم کمینه:

$$x = A^T y$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

گام ۱:

$$AA^T = \begin{bmatrix} 14 & 20 \\ 20 & 29 \end{bmatrix} \xrightarrow{AA^T y = b} y = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

گام ۲:

$$x = A^T y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

جواب نرم کمینه برای مساله فرو معین با رتبه کامل (با استفاده از تجزیه QR)

قضیه تجزیه QR (ماتریس مستطیلی): فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ یک ماتریس رتبه کامل سطری باشد. آنگاه ماتریس متعامد $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و ماتریس بالا مثلثی $R \in \mathbb{R}^{n \times m}$ وجود دارند به طوری که

$$A^T = QR, \quad Q = [Q_1, Q_2], \quad R = \begin{bmatrix} R_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

که در آن، $Q_1 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ و $Q_2 \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}$.

$$A^T = Q \begin{bmatrix} R_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \Rightarrow c A = \begin{bmatrix} R_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}^T Q^T = [R_1^T, \mathbf{0}^T] Q^T \xrightarrow{Ax=b} [R_1^T, \mathbf{0}^T] Q^T x = b$$

$$\xrightarrow{Q=[Q_1, Q_2]} [R_1^T, \mathbf{0}^T] \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix} x = b \Rightarrow R_1^T Q_1^T x = b$$

الگوریتم محاسبه جواب نرم کمینه برای مساله فرو معین با رتبه کامل با استفاده از تجزیه QR

گام ۱: محاسبه تجزیه $A^T = QR$

$$A^T = Q \begin{bmatrix} R_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

گام ۲: افراز ماتریس Q :

$$Q = [Q_1, Q_2]$$

گام ۳: حل دستگاه پایین مثلثی:

$$R_1^T y_R = b$$

گام ۴: محاسبه جواب نرم کمینه:

$$x = Q_1 y_R$$

تمرین: جواب نرم کمینه دستگاه $Ax = b$ را با استفاده از تجزیه $A^T = QR$ محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

جواب نرم کمینه برای دستگاه فرامعین با رتبه کامل (با استفاده از معادلات نرمال)

قضیه (وجود و یکتایی جواب برای یک دستگاه فرامعین): همواره یک جواب برای مساله کمترین مربعات خطی وجود دارد. این جواب منحصر بفرد است اگر و فقط اگر ماتریس A از رتبه کامل باشد. در صورتی که ماتریس A از رتبه ناقص باشد، مساله کمترین مربعات خطی دارای بیشمار جواب است.

اثبات: (Numerical Linear Algebra and Applications, Biswa Nath Datta, 1995.)

لم: بردار $x \in \mathbb{R}^n$ ، یک جواب کمترین مربعات دستگاه فرامعین $Ax = b$ است اگر و فقط اگر x جواب دستگاه معادلات $A^T Ax = A^T b$ باشد.

اثبات: (Numerical Linear Algebra and Applications, Biswa Nath Datta, 1995.)

دستگاه معادلات $A^T Ax = A^T b$ را معادلات نرمال گویند.

تمرین: ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و بردار $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$ مفروضند، جواب کمترین مربعات دستگاه $Ax = b$ را با استفاده از معادلات نرمال محاسبه کنید.

جواب نرم کمینه برای دستگاه فرامعین با رتبه کامل (با استفاده از تجزیه QR)

قضیه تجزیه QR (ماتریس مستطیلی): فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ یک ماتریس رتبه کامل باشد. آنگاه ماتریس متعامد $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ و ماتریس بالا مثلثی $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ وجود دارند به طوری که

$$A = QR, \quad Q = [Q_1, Q_2], \quad R = \begin{bmatrix} R_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

که در آن، $R_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $Q_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ و $Q_2 \in \mathbb{R}^{m \times (m-n)}$.

$$\begin{aligned} \|r(x)\|^2 &:= \|Ax - b\|_2^2 = \|Q^T Ax - Q^T b\|_2^2 \xrightarrow{A=Q \begin{bmatrix} R_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, Q=[Q_1, Q_2]} \|r(x)\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} R_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix} b \right\|_2^2 + \|d\|_2^2 \\ &\xrightarrow{c:=Q_1^T b, d:=Q_2^T b} \|r(x)\|^2 = \|R_1 x - c\|_2^2 + \|d\|_2^2 \end{aligned}$$

اگر x را طوری انتخاب کنیم که $R_1 x = c$ ، آن گاه $\|r(x)\|^2 := \|Ax - b\|_2^2 = \|d\|_2^2$ است.

الگوریتم محاسبه جواب نرم کمینه برای مساله فرامعین با رتبه کامل با استفاده از تجزیه QR

گام ۱: محاسبه تجزیه $A = QR$

$$A = Q \begin{bmatrix} R_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

گام ۲: محاسبه $Q^T b$

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} := Q^T b = \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix} b$$

گام ۳: حل دستگاه پایین مثلثی:

$$R_1 x = c$$

گام ۴: محاسبه باقیمانده کمینه:

$$\|r(x)\|_2 = \|d\|_2$$

جواب نرم کمینه برای دستگاه فرامعین با رتبه کامل (با استفاده از تجزیه QR)

قضیه تجزیه QR (ماتریس مستطیلی): فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ یک ماتریس رتبه کامل باشد. آنگاه ماتریس متعامد $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ و ماتریس بالا مثلثی $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ وجود دارند به طوری که

$$A = QR, \quad Q = [Q_1, Q_2], \quad R = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

که در آن، $R_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $Q_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ و $Q_2 \in \mathbb{R}^{m \times (m-n)}$.

تمرین: ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و بردار $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$ مفروضند:

الف: آیا این ماتریس از رتبه کامل ستونی است؟

ب: تجزیه $A = QR$ را محاسبه کنید.

ج: جواب کمترین مربعات دستگاه $Ax = b$ را با استفاده از تجزیه $A = QR$ محاسبه کنید.

مساله كمترين مربعات خطي:

برازش منحنى

يکى از مهمترين کاربردهاى مساله كمترين مربعات، **مساله برازش منحنى** است.

در برازش منحنى با مفروض بودن n زوج (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) ، ... و (x_n, y_n) ، به دنبال يافتن بهترين منحنى برازش کننده اين داده‌ها به عنوان تابعى از x_i ها هستيم. يعنى، به دنبال تابعى مثل $P(x)$ هستيم که به ازاي $i=1, 2, \dots, n$ ، مقدار باقىمانده $r_i = P(x_i) - y_i$ کمينه گردد. در اين حالت، مساله كمترين مربعات خطى را ميتوان به صورت زير نوشت:

$$\min \sum_{i=1}^n r_i^2$$

مساله كمترين مربعات خطي: برازش منحنی

مجموعه داده های جدول زیر در نظر بگیرید:

x_i	y_i
x_1	y_1
x_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

$$x_i, y_i \in \mathbb{R} \quad \text{for } i=1,2,\dots,n$$

سوال: ضرایب بهترین چندجمله ای از درجه حداکثر m برازش کننده داده های جدول فوق را بیابید.

سوال: بهترین منحنی نمایی ($P(x) = ae^{bx}$) برازش کننده داده های جدول فوق را بیابید.

سوال: ضرایب بهترین منحنی $P(x) = a_0 + a_1x^1 + a_3x^3$ برازش کننده داده های جدول فوق را بیابید.

مساله كمترين مربعات خطي:

برازش منحنی

سوال: مجموعه داده های جدول زیر مفروضند:

x_i	y_i
x_1	y_1
x_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

$$x_i, y_i \in \mathbb{R} \text{ for } i=1,2,\dots,n$$

ضرایب بهترین چندجمله ای از درجه حداکثر m برازش کننده داده های جدول فوق را بیابید.

$$P_m(x) = a_0 + a_1x^1 + \dots + a_mx^m$$

الگوریتم محاسبه بهترین چندجمله ای از درجه حداکثر m برازش کننده داده های جدول فوق

گام ۱: تعریف تابع خطا:

$$\begin{aligned} E(a_0, a_1, \dots, a_m) &= \sum_{i=1}^n (y_i - P_m(x_i))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1x_i^1 - \dots - a_mx_i^m)^2 \end{aligned}$$

گام ۲: تعریف مساله کمینه سازی:

$$\min E(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1x_i^1 - \dots - a_mx_i^m)^2$$

گام ۳: حل مساله کمینه سازی

مساله كمترين مربعات خطي:

برازش منحنی

(ادامه)

$$y = a_0 + a_1x^1 + \dots + a_mx^m$$

$$E(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1x_i^1 - \dots - a_mx_i^m)^2$$

حل مساله كمینه سازی

$$\frac{\partial E(a_0, a_1, \dots, a_m)}{\partial a_0} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n -2(y_i - a_0 - a_1x_i^1 - \dots - a_mx_i^m) = 0$$

$$\frac{\partial E(a_0, a_1, \dots, a_m)}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n -2x_i(y_i - a_0 - a_1x_i^1 - \dots - a_mx_i^m) = 0$$

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

$$\frac{\partial E(a_0, a_1, \dots, a_m)}{\partial a_j} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n -2x_i^j(y_i - a_0 - a_1x_i^1 - \dots - a_mx_i^m) = 0$$

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

$$\frac{\partial E(a_0, a_1, \dots, a_m)}{\partial a_m} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n -2x_i^m(y_i - a_0 - a_1x_i^1 - \dots - a_mx_i^m) = 0$$

مساله كمترين مربعات خطي: برازش منحنی

(ادامه)

حل مساله كمینه سازی

با محاسباتی ساده، دستگاه معادلات زیر حاصل می شود:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_0 x_i^0 + \sum_{i=1}^n a_1 x_i^1 + \dots + \sum_{i=1}^n a_m x_i^m &= \sum_{i=1}^n y_i x_i^0 \\ \sum_{i=1}^n a_0 x_i^1 + \sum_{i=1}^n a_1 x_i^2 + \dots + \sum_{i=1}^n a_m x_i^{m+1} &= \sum_{i=1}^n y_i x_i^1 \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^n a_0 x_i^j + \sum_{i=1}^n a_1 x_i^{j+1} + \dots + \sum_{i=1}^n a_m x_i^{m+1} &= \sum_{i=1}^n y_i x_i^j \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^n a_0 x_i^m + \sum_{i=1}^n a_1 x_i^{m+1} + \dots + \sum_{i=1}^n a_m x_i^{2m} &= \sum_{i=1}^n y_i x_i^m \end{aligned} \right\} (*)$$

مساله كمترين مربعات خطي: برازش منحنی

(ادامه)

حل مساله كمينه سازي

با تعريف $S_k := \sum_{i=1}^n x_i^k$ به ازاي $k \in \{0, 1, \dots, 2m\}$ و $b_k := \sum_{i=1}^n y_i x_i^k$ به ازاي $k \in \{0, 1, \dots, m\}$ دستگاه معادلات (*) به شكل ماتريسي زير تبديل مي شود:

$$\begin{bmatrix} S_0 & S_1 & \cdots & S_m \\ S_1 & S_2 & \cdots & S_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_m & S_{m+1} & \cdots & S_{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات فوق را مي توان به صورت **دستگاه معادلات نرمال** زير نمايش داد:

$$V^T V a = b = V^T y$$

كه در آن

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^m \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^m \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

مساله كمترين مربعات خطي: برازش منحنی

مثال: ضرایب بهترین خط راست برازش کننده داده های جدول زیر را محاسبه کنید:

Time, t (s)	Velocity, v (m/s)
0	0
2	6
5	7.9
7	8.5
9	12
13	21.5
24	35

حل (راهنمایی): $n = 7$, $m = 1$

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 1 & 7 \\ 1 & 9 \\ 1 & 13 \\ 1 & 24 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 7.9 \\ 8.5 \\ 12.0 \\ 21.5 \\ 35.0 \end{bmatrix} \quad \xrightarrow{V^T V a = b = V^T y} \begin{bmatrix} 7 & 60 \\ 60 & 904 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 0.0906 \\ 1.3385 \end{bmatrix}$$
$$y = a_0 + a_1 x$$

$$a_0 = 0.6831$$

$$a_1 = 1.4353$$

مساله كمترين مربعات خطي: برازش منحنی

x_i	y_i
x_1	y_1
x_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

سوال: مجموعه داده های جدول زیر مفروضند:

$$x_i, y_i \in \mathbb{R} \text{ for } i=1,2,\dots,n$$

ضرایب بهترین منحنی نمایی برازش کننده داده های جدول فوق را بیابید.

$$y = ae^{bx}$$

برای محاسبه بهترین منحنی نمایی برازش کننده داده های جدول فوق، لگاریتم طبیعی دو طرف رابطه $y = ae^{bx}$ را محاسبه می کنیم.

$$\ln y = \ln a + bx$$

با تغییر متغیر $\hat{y} := \ln y$ و $\hat{a} := \ln a$ ، مساله محاسبه مقادیر بهینه a و b به یک مساله كمترين مربعات خطي با پارامترهای $\hat{a}$ و b تبدیل می شود. یعنی باید ضرایب بهینه برای خط $\hat{y} = \hat{a} + bx$ را محاسبه نمود.

مساله کمترین مربعات خطی: برازش منحنی

(ادامه)

x_i	y_i
x_1	y_1
x_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

سوال: مجموعه داده های جدول زیر مفروضند:

$$x_i, y_i \in \mathbb{R} \text{ for } i=1,2,\dots,n$$

ضرایب بهترین منحنی نمایی برازش کننده داده های جدول فوق را بیابید.

$$y = ae^{bx}$$

الگوریتم محاسبه بهترین منحنی نمایی برازش کننده

گام ۱: محاسبه $\ln y_i$ به ازای $i=1,2,\dots,n$

گام ۲: تعریف مساله کمینه سازی:

$$\min E(\hat{a}, b) = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \hat{a} - bx_i)^2$$

گام ۳: حل مساله کمینه سازی و محاسبه $\hat{a}$ و b .

گام ۴: محاسبه a :

$$a = e^{\hat{a}}$$

مساله كمترين مربعات خطي: برازش منحنی

(ادامه)

x_i	y_i
x_1	y_1
x_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

سوال: مجموعه داده های جدول زیر مفروضند:

$$x_i, y_i \in \mathbb{R} \text{ for } i=1,2,\dots,n$$

ضرایب بهترین منحنی نمایی برازش کننده داده های جدول فوق را بیابید.

$$y = ae^{bx}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ln y_1 \\ \ln y_2 \\ \vdots \\ \ln y_n \end{bmatrix}$$

$$a = e^{\hat{a}}$$

مساله كمتريـن مربعات خطي:

برازش منحنى

سوال: مجموعه داده هاى جدول زير مفروضند:

x_i	y_i
x_1	y_1
x_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

$$x_i, y_i \in \mathbb{R} \text{ for } i=1,2,\dots,n$$

ضرايب بهترين منحنى نمايى برازش كننده داده هاى جدول فوق را بياييد.

$$y = a_0 + a_1x^1 + a_3x^3$$

مساله كمترين مربعات خطي: برازش منحنی

(ادامه)

x_i	y_i
x_1	y_1
x_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

سوال: مجموعه داده های جدول زیر مفروضند:

$$x_i, y_i \in \mathbb{R} \text{ for } i=1,2,\dots,n$$

ضرایب بهترین منحنی نمایی برازش کننده داده های جدول فوق را بیابید.

$$y = a_0 + a_1x^1 + a_3x^3$$

$$\min E(a_0, a_1, a_3) = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1x_i^1 - a_3x_i^3)^2$$

$$\frac{\partial E(a_0, a_1, a_3)}{\partial a_0} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n -2(y_i - a_0 - a_1x_i^1 - a_3x_i^3) = 0$$

$$\frac{\partial E(a_0, a_1, a_3)}{\partial a_1} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n -2x_i(y_i - a_0 - a_1x_i^1 - a_3x_i^3) = 0$$

$$\frac{\partial E(a_0, a_1, a_3)}{\partial a_3} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n -2x_i^3(y_i - a_0 - a_1x_i^1 - a_3x_i^3) = 0$$

تمرین

تمرین ۱: جدول زیر، سرعت رو به بالای یک راکت را در سه نقطه مختلف از بازه زمانی ۵ تا ۱۲ ثانیه ($5 \leq t \leq 12$) نشان می دهد.

Time, t (s)	Velocity, v (m/s)
5	106.8
8	177.2
12	279.2

بهترین چندجمله ای از درجه حداکثر دو برازش کننده داده های جدول فوق را بیابید.

حل (راهنمایی): باید ضرایب بهترین چند جمله ای $v(t) = at^2 + bt + c$ را بیابیم.

تمرین

(ادامه)

تمرین ۲: بهترین منحنی نمایی به شکل $y = ae^{bx} + c$ برازش کننده داده های جدول زیر را محاسبه کنید:

Time, t (s)	Velocity, v (m/s)
10	62.1
12.5	77.3
15	92.5
17.5	104
20	112.9
22.5	121.9
25	125
27.5	129.4
30	134
32.5	138.2
35	142.3
37.5	143.2
40	144.6
42.5	147.2
45	147.8
47.5	149.1
50	150.9