

به نام او، به یاد او، برای او

محاسبات علمی

حل دستگاه معادلات خطی

روش تجزیه LU با محورگیری کلی

دکتر علی ولی نژاد

valinejad.ir

valinejad@umz.ac.ir

University of Mazandaran

تبدیل مقدماتی (تبدیل گاوسی، ماتریس مقدماتی)

تعریف تبدیل مقدماتی: چنان چه حداقل یکی از عناصر زیر قطر اصلی از یکی از ستون‌های ماتریس واحد را تغییر دهیم، ماتریس پایین مثلثی واحد حاصل را ماتریس مقدماتی (تبدیل مقدماتی یا تبدیل گاوسی) نامند.

تبدیل مقدماتی حاصل از تغییر ستون k ام ماتریس واحد:

$$M_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & m_{k+1,k} & \\ & & & m_{k+2,k} & \\ & & & \vdots & \\ & & & m_{n,k} & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$M_k = I + \tau^{(k)} e_k^T = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_{k+1,k} \\ m_{k+2,k} \\ \vdots \\ m_{n,k} \end{bmatrix} \underbrace{[0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T}_{e_k^T}$$

ویرایش‌های مختلف روش تجزیه LU

➤ روش تجزیه LU بدون محورگیری

$$A = LU$$

➤ روش تجزیه LU با محورگیری جزئی

$$PA = LU$$

➤ روش تجزیه LU با محورگیری کلی

$$PAQ = LU$$

ماتریس جایگشت

تعریف ماتریس جایگشت: ماتریسی که از جابجایی سطرهاى ماتریس واحد به دست می‌آید را ماتریس جایگشت نامند.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$AQ = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 8 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

تجزیه LU با محورگیری کلی

قضیه (تجزیه LU با محورگیری کلی، $MAQ = U$): اگر روند حذفی گاوس (با محورگیری کلی) با موفقیت روی ماتریس نامنفرد $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ اعمال شود، آن گاه یک ماتریس جایگشت Q ، یک ماتریس مقدماتی جایگشت یافته M و یک ماتریس بالامثلثی U چنان وجود دارند که $MAQ = U$.

اثبات (به صورت ساختاری):

گام ۰: قرار دهید $A^{(0)} := A$.

گام ۱:

الف) بزرگترین عنصر از لحاظ قدرمطلق در بین همه درایه‌های واقع در زیر ماتریس شامل ستون‌های اول تا آخر و سطرهاى اول تا آخر از ماتریس $A^{(0)}$ را پیدا کنید.

$$|a_{r_1, c_1}^{(0)}| = \max \{ |a_{ij}^{(0)}| : i, j = 1, 2, \dots, n \}$$

ب) ماتریس جایگشت P_1 را از جابجا کردن سطرهاى اول و r_1 ام ماتریس واحد بسازید.

ج) ماتریس جایگشت Q_1 را از جابجا کردن ستون‌های اول و c_1 ام ماتریس واحد بسازید.

د) ماتریس مقدماتی M_1 را چنان تشکیل دهید که عناصر زیر مولفه $(1, 1)$ از ستون اول ماتریس $Q_1 P_1 A^{(0)}$ صفر شوند $A^{(1)} := M_1 P_1 A^{(0)} Q_1$

$$A^{(1)} = M_1 P_1 A^{(0)} Q_1 = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

تجزیه LU با محورگیری کلی

(ادامه اثبات)

قضیه (تجزیه LU با محورگیری کلی، $MAQ = U$): اگر روند حذفی گاوس (با محورگیری کلی) با موفقیت روی ماتریس نامنفرد $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ اعمال شود، آن گاه یک ماتریس جایگشت Q ، یک ماتریس مقدماتی جایگشت یافته M و یک ماتریس بالامثلثی U چنان وجود دارند که $MAQ = U$.

اثبات (به صورت ساختاری):

گام ۲:

الف) بزرگترین عنصر از لحاظ قدرمطلق در بین همه درایه‌های واقع در زیر ماتریس شامل ستون‌های دوم تا آخر و سطرهاى دوم تا آخر از ماتریس $A^{(1)}$ را پیدا کنید.

$$|a_{r_2, c_2}^{(1)}| = \max \{|a_{ij}^{(1)}| : i, j = 2, 3, \dots, n\}$$

ب) ماتریس جایگشت P_2 را از جابجا کردن سطرهاى دوم و r_2 ام ماتریس واحد بسازید.

ج) ماتریس جایگشت Q_2 را از جابجا کردن ستون‌های دوم و c_2 ام ماتریس واحد بسازید.

د) ماتریس مقدماتی M_2 را چنان تشکیل دهید که عناصر زیر مولفه $(2, 2)$ از ستون دوم ماتریس $Q_2 P_2 A^{(1)} := M_2 P_2 A^{(1)} Q_2$ صفر شوند

$$A^{(2)} = M_2 P_2 A^{(1)} Q_2 = \begin{bmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ & * & * & \cdots & * \\ & & * & \cdots & * \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

تجزیه LU با محورگیری کلی

(ادامه اثبات)

قضیه (تجزیه LU با محورگیری کلی، $MAQ = U$): اگر روند حذفی گاوس (با محورگیری کلی) با موفقیت روی ماتریس نامنفرد $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ اعمال شود، آن گاه یک ماتریس جایگشت Q ، یک ماتریس مقدماتی جایگشت یافته M و یک ماتریس بالامثلثی U چنان وجود دارند که $MAQ = U$.

اثبات (به صورت ساختاری):

گام k :

الف) بزرگترین عنصر از لحاظ قدرمطلق در بین همه درایه‌های واقع در زیر ماتریس شامل ستون‌های k تا آخر و سطرهای k تا آخر از ماتریس $A^{(k-1)}$ را پیدا کنید.

$$|a_{r_k, c_k}^{(k-1)}| = \max \{ |a_{ij}^{(k-1)}| : i, j = k, k+1, \dots, n \}$$

ب) ماتریس جایگشت P_k را از جابجا کردن سطرهای k ام و r_k ام ماتریس واحد بسازید.

ج) ماتریس جایگشت Q_k را از جابجا کردن ستون‌های k ام و c_k ام ماتریس واحد بسازید.

د) ماتریس مقدماتی M_k را چنان تشکیل دهید که عناصر زیر مولفه (k, k) از ستون k ام ماتریس $Q_k P_k A^{(k-1)}$ صفر شوند $A^{(k)} := M_k P_k A^{(k-1)} Q_k$

$$A^{(k)} = M_k P_k A^{(k-1)} Q_k = \begin{bmatrix} * & * & * & \dots & * \\ & * & * & \dots & * \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & * & \dots & * \\ & & & & * & \dots & * \\ & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & * & \dots & * \end{bmatrix}$$

تجزیه LU با محورگیری کلی

(ادامه اثبات)

قضیه (تجزیه LU با محورگیری کلی، $MAQ = U$): اگر روند حذفی گاوس (با محورگیری کلی) با موفقیت روی ماتریس نامفرد $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ اعمال شود، آن گاه یک ماتریس جایگشت Q ، یک ماتریس مقدماتی جایگشت یافته M و یک ماتریس بالامثلثی U چنان وجود دارند که $MAQ = U$.

اثبات (به صورت ساختاری):

گام $n-1$:

الف) بزرگترین عنصر از لحاظ قدرمطلق در بین همه درایه‌های واقع در زیر ماتریس شامل ستون‌های $n-1$ ام و آخر و سطرهای $n-1$ ام و آخر از ماتریس $A^{(n-1)}$ را پیدا کنید.

$$|a_{r_{n-1}, c_{n-1}}^{(n-2)}| = \max \{ |a_{ij}^{(n-2)}| : i, j = n-1, n \}$$

ب) ماتریس جایگشت P_{n-1} را از جابجاکردن سطرهای $n-1$ ام و r_{n-1} ام ماتریس واحد بسازید.

ج) ماتریس جایگشت Q_{n-1} را از جابجاکردن ستون‌های $n-1$ ام و c_{n-1} ام ماتریس واحد بسازید.

د) ماتریس مقدماتی M_{n-1} را چنان تشکیل دهید که عناصر زیر مولفه $(n-1, n-1)$ از ستون $n-1$ ام ماتریس $A^{(n-1)}$ صفر شوند

$$A^{(n-1)} := M_{n-1} P_{n-1} A^{(n-2)} Q_{n-1}$$

$$A^{(n-1)} = M_{n-1} P_{n-1} A^{(n-2)} Q_{n-1} = \begin{bmatrix} * & * & * & \dots & * \\ & * & * & \dots & * \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & * & \dots & * \\ & & & & * & \dots & * \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & * & \dots & * \end{bmatrix}$$

تجزیه LU با محورگیری کلی

(ادامه اثبات)

قضیه (تجزیه LU با محورگیری کلی، $MAQ = U$): اگر روند حذفی گاوس (با محورگیری کلی) با موفقیت روی ماتریس نامنفرد $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ اعمال شود، آن گاه یک ماتریس جایگشت Q ، یک ماتریس مقدماتی جایگشت یافته M و یک ماتریس بالامثلثی U چنان وجود دارند که $MAQ = U$.

اثبات (به صورت ساختاری):

$$A^{(0)} := A$$

$$A^{(1)} = M_1 P_1 A^{(0)} Q_1 = M_1 P_1 A Q_1$$

$$A^{(2)} = M_2 P_2 A^{(1)} Q_2 = M_2 P_2 M_1 P_1 A Q_1 Q_2$$

$\vdots$

$$A^{(n-1)} = M_{n-1} P_{n-1} A^{(n-2)} Q_{n-1} = M_{n-1} P_{n-1} M_{n-2} P_{n-2} \dots M_1 P_1 A Q_1 Q_2 \dots Q_{n-1}$$

$$U := A^{(n-1)} = \underbrace{M_{n-1} P_{n-1} M_{n-2} P_{n-2} \dots M_1 P_1}_M A \underbrace{Q_1 Q_2 \dots Q_{n-1}}_Q \Rightarrow MAQ = U$$

تجزیه LU با محورگیری کلی

(ادامه اثبات)

قضیه (تجزیه LU با محورگیری کلی، $PAQ = LU$): اگر روند حذفی گاوس (با محورگیری کلی) با موفقیت روی ماتریس نامنفرد $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ اعمال شود، آن ماتریس‌های جایگشت P و Q ، یک ماتریس پایین مثلثی واحد L و یک ماتریس بالامثلثی U چنان وجود دارند که $PAQ = LU$.

اثبات (به صورت ساختاری):

با استفاده از قضیه قبل داریم:

$$U := A^{(n-1)} = \underbrace{M_{n-1}P_{n-1}M_{n-2}P_{n-2} \dots M_1P_1}_M A \underbrace{Q_1 Q_2 \dots Q_{n-1}}_Q$$



$$MAQ = U$$

قرار دهید

$$P := P_{n-1}P_{n-2} \dots P_1$$

و

$$L := PM^{-1}$$

در نتیجه:

$$PAQ = LU$$

تجزیه LU با محورگیری کلی

شبه کد تجزیه LU با محورگیری کلی

$$A^{(0)} = A$$

for $k=1:n-1$

find r_k and c_k such that $|a_{r_k, c_k}^{(k-1)}| = \max_{i,j=k,k+1,\dots,n} \{ |a_{i,j}^{(k-1)}| \}$ And save r_k and c_k .

if $a_{r_k, c_k} = 0$,
STOP.

$$P^{(k)} = \text{eye}(n, n)$$

$$Q^{(k)} = \text{eye}(n, n)$$

Interchange the rows r_k and k of $P^{(k)}$: $p_{r_k, j}^{(k)} \leftrightarrow p_{k, j}^{(k)} \quad j = 1, 2, \dots, n$

Interchange the cloumns c_k and k of $Q^{(k)}$: $Q_{i, c_k}^{(k)} \leftrightarrow Q_{i, k}^{(k)} \quad k = 1, 2, \dots, n$

$$M^{(k)} = \text{eye}(n, n)$$

$$T^{(k)} := P^{(k)} A^{(k-1)} Q^{(k)}$$

for $i=k+1:n$

$$m_{ik}^{(k)} = -\frac{t_{ik}^{(k)}}{t_{kk}^{(k)}}$$

$$A^{(k)} := M^{(k)} P^{(k)} A^{(k-1)} Q^{(k)}$$

$$U := A^{(n-1)}$$

$$M := M_{n-1} P_{n-1} M_{n-2} P_{n-2} \dots M_1 P_1$$

$$Q := Q_1 Q_2 \dots Q_{n-1}$$

$$P := P_{n-1} P_{n-2} \dots P_1$$

$$L := P M^{-1}$$

$$MAQ = U$$

$$PA = LU$$

تجزیه LU با محورگیری کلی

مثال: با استفاده از روش حذفی گاوس، ماتریس زیر را به صورت $MAQ = U$ و $PAQ = LU$ تجزیه کنید

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{(0)} := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$k=1$

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |a_{23}^{(0)}| = \max \{|a_{ij}^{(0)}| : i, j = 1, 2, 3\} \Rightarrow r_1 = 2, c_1 = 3$$

$$\Rightarrow P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P_1 A^{(0)} Q_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{(1)} = M_1 P_1 A^{(0)} Q_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

تجزیه LU با محورگیری کلی

(ادامه)

مثال: با استفاده از روش حذفی گاوس، ماتریس زیر را به صورت $MAQ = U$ و $PAQ = LU$ تجزیه کنید

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$k=2$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow |a_{33}^{(1)}| = \max \{|a_{ij}^{(3)}| : i, j = 2, 3\} \Rightarrow r_2 = c_2 = 3$$

$$\Rightarrow P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P_2 A^{(1)} Q_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{(2)} = M_2 P_2 A^{(1)} Q_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

تجزیه LU با محورگیری کلی

(ادامه)

مثال: با استفاده از روش حذفی گاوس، ماتریس زیر را به صورت $MAQ = U$ و $PAQ = LU$ تجزیه کنید

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$U := A^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$M := M_2 P_2 M_1 P_1$$

$$Q = Q_1 Q_2$$

$\xRightarrow{?}$

$$MAQ = U$$

$$P = P_2 P_1$$

$$L = PM^{-1}$$

$\xRightarrow{?}$

$$PAQ = LU$$

حل دستگاه معادلات خطی $Ax=b$ با استفاده از تجزیه $MAQ=U$

$$Ax = b \Rightarrow MAx = Mb \xrightarrow{b' := Mb} MAx = b' \xrightarrow{x := Qy} MAQy = b' \xrightarrow{MAQ=U} Uy = b' \Rightarrow x = Qy$$

الگوریتم حل دستگاه معادلات خطی $Ax=b$ با استفاده از تجزیه $MAQ=U$

گام ۱: محاسبه تجزیه $MAQ=U$

گام ۲: محاسبه $b' = Mb$

گام ۳: حل دستگاه بالا مثلثی $Uy = b'$ با استفاده از روش جایگذاری پسرو

$$y_n = \frac{b'_n}{u_{nn}}$$

$$y_i = \frac{b'_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}y_j}{u_{ii}}, \quad \text{for } i = n-1, \dots, 1$$

گام ۴: محاسبه $x = Qy$

حل دستگاه معادلات خطی $Ax=b$ با استفاده از تجزیه $MAQ=U$

تمرین: دستگاه مقابل را با استفاده از تجزیه $MAQ=U$ از ماتریس ضرائب حل کنید.

$$\begin{aligned} +1x_2 + 1x_3 &= 2 \\ +1x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ +1x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 3 \end{aligned}$$

گام ۱: محاسبه تجزیه $MAQ=U$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{MAQ=U}$$

گام ۲: محاسبه $b' = Mb$

گام ۳: حل دستگاه بالا مثلثی $Uy = b'$ با استفاده از روش جایگذاری پسرو

گام ۴: محاسبه $x = Qy$

حل دستگاه معادلات خطی $Ax=b$ با استفاده از تجزیه $PAQ=LU$

$$\begin{aligned} Ax = b &\Rightarrow PAx = Pb \xrightarrow{b' := Pb} PAx = b' \xrightarrow{x := Qy} PAQy = b' \xrightarrow{PAQ=LU} LUy = b' \\ &\xrightarrow{z := Uy} Lz = b' \Rightarrow Uy = z \Rightarrow x = Qy \end{aligned}$$

الگوریتم حل دستگاه معادلات خطی $Ax=b$ با استفاده از تجزیه $PAQ=LU$

گام ۱: محاسبه تجزیه $PAQ=LU$

گام ۲: محاسبه $b' = Pb$

گام ۳: حل دستگاه پایین مثلثی $Lz = b'$ با استفاده از روش جایگذاری پیشرو

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{b'_1}{l_{11}} \\ z_i &= \frac{b'_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}z_j}{l_{ii}}, \quad \text{for } i = 2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

گام ۴: حل دستگاه بالا مثلثی $Uy = z$ با استفاده از روش جایگذاری پسرو

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{z_n}{u_{nn}} \\ y_i &= \frac{z_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}y_j}{u_{ii}}, \quad \text{for } i = n-1, \dots, 1 \end{aligned}$$

گام ۵: محاسبه $x = Qy$

حل دستگاه معادلات خطی $Ax=b$ با استفاده از تجزیه $PAQ=LU$

تمرین: دستگاه مقابل را با استفاده از تجزیه $PAQ=LU$ از ماتریس ضرائب حل کنید.

$$\begin{aligned} &+1x_2 + 1x_3 = 2 \\ +1x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ +1x_1 + 1x_2 + 1x_3 &= 3 \end{aligned}$$

تجزیه LU با محورگیری کلی با ذخیره‌سازی اقتصادی

با نگاهی به گام‌های الگوریتم تجزیه LU با محورگیری کلی، می‌توان به نکات زیر اشاره کرد:

۱- میزان حافظه مورد نیاز برای ذخیره‌سازی ماتریس‌های جایگشت $P_1, P_2, \dots$ و P_{n-1} برابر $g(n-1)n^2$ واحد است، که در آن، g نشان دهنده میزان حافظه مورد نیاز برای ذخیره‌سازی یک درایه از هر ماتریس است.

۲- میزان حافظه مورد نیاز برای ذخیره‌سازی ماتریس‌های جایگشت $Q_1, Q_2, \dots$ و Q_{n-1} برابر $g(n-1)n^2$ واحد است، که در آن، g نشان دهنده میزان حافظه مورد نیاز برای ذخیره‌سازی یک درایه از هر ماتریس است.

۳- تعداد زیادی درایه صفر در ماتریس‌های جایگشت وجود دارند که میزان حافظه زیادی را از سیستم مصرف می‌کنند.

۴- میزان حافظه مورد نیاز برای ذخیره‌سازی تبدیل‌های مقدماتی $M_1, M_2, \dots$ و M_{n-1} برابر $g(n-1)n^2$ واحد است، که در آن، g نشان دهنده میزان حافظه مورد نیاز برای ذخیره‌سازی یک درایه از هر ماتریس است.

۵- با توجه به پایین مثلی واحد بودن تبدیل‌های مقدماتی $M_1, M_2, \dots$ و M_{n-1} ، حافظه زیادی صرف ذخیره‌سازی درایه‌های صفر می‌شود.

۶- میزان حافظه مورد نیاز برای ذخیره‌سازی ماتریس‌های $A^{(0)}, A^{(1)}, \dots$ و $A^{(n-1)}$ برابر gn^3 واحد است. که در آن، g میزان حافظه مورد نیاز برای ذخیره‌سازی یک درایه از هر ماتریس است.

۷- بعد از اتمام گام k ام، همه درایه‌های واقع در زیر قطر اصلی از ستون‌های اول تا k ام ماتریس $A^{(k)}$ برابر صفرند.

۸- تعداد زیادی درایه صفر در ماتریس‌های $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots$ و $A^{(n-1)}$ وجود دارند که میزان حافظه زیادی را از سیستم مصرف می‌کنند.

تجزیه LU با محورگیری کلی با ذخیره‌سازی اقتصادی

پیاده‌سازی تجزیه LU با محورگیری کلی، حافظه زیادی را از سیستم به خود اختصاص می‌دهد. برای صرفجویی در حافظه، می‌توان به جای تشکیل ماتریس‌های $A^{(0)}$ ، $A^{(1)}$ ، ... و $A^{(n-1)}$ ، همه محاسبات را روی ماتریس اولیه A انجام داد و تبدیل‌های مقدماتی M_1 ، M_2 ، ... و M_{n-1} و ماتریس‌های L و U را به صورت ضمنی روی آن ذخیره نمود. به این منظور می‌توان در گام k ام از الگوریتم، داریه‌های $k+1$ ام تا n ام از بردار $\tau^{(k)}$ را به جای صفرهای واقع بر روی داریه‌های $k+1$ ام تا n ام از ستون k ام ماتریس A ذخیره نمود.

به جای ذخیره‌سازی کل داریه‌های ماتریس جایگشت P_k ، می‌توان با تعریف یک آرایه $n-1$ عضوی Row، شماره سطر جابجا شونده با سطر k ام، یعنی r_k ، را در اندیس k ام آن ذخیره نمود.

به جای ذخیره‌سازی کل داریه‌های ماتریس جایگشت Q_k ، می‌توان با تعریف یک آرایه $n-1$ عضوی Col، شماره ستون جابجا شونده با ستون k ام، یعنی c_k ، را در اندیس k ام آن ذخیره نمود.

تجزیه LU با محورگیری کلی با ذخیره‌سازی اقتصادی

شبه کد تجزیه LU با محورگیری کلی با ذخیره‌سازی اقتصادی

```
for k=1:n-1
     $|a_{r_k, c_k}| = \max_{i,j=k,k+1,\dots,n} \{|a_{ij}|\}$ 
    Row(k)=  $r_k$ 
    Col(k)=  $c_k$ 
     $a_{r_k, j} \Leftrightarrow a_{k, j} \quad j=k, k+1, \dots, n$ 
     $a_{i, c_k} \Leftrightarrow a_{i, k} \quad i=1, 2, \dots, n$ 
    for i=k+1:n
         $a_{ik} := \tau_i^{(k)} = m_{ik}^{(k)} = -\frac{a_{ik}}{a_{kk}}$ 
        for j=k+1:n
             $a_{ij} = a_{ij} + a_{ik}a_{kj}$ 
```

پس از اتمام الگوریتم تجزیه LU با محورگیری کلی با ذخیره‌سازی اقتصادی، عناصر بالامثلثی ماتریس نهایی A ، قسمت بالامثلثی ماتریس (بالامثلثی) U را تشکیل می‌دهند.

ماتریس جایگشت P_k را می‌توان باجابجایی سطرها k ام و $\text{Row}(k)$ ام از ماتریس واحد ساخت.

ماتریس جایگشت Q_k را می‌توان باجابجایی ستون های k ام و $\text{Col}(k)$ ام از ماتریس واحد ساخت.

تبدیل مقدماتی M_k را می‌توان براساس عناصر زیر قطر اصلی از ستون k ام از ماتریس نهایی A ساخت.

پس از محاسبه ماتریس های جایگشت و مقدماتی، ماتریس های P و L را می‌توان براساس تعریف آنها محاسبه نمود.

تجزیه LU با محورگیری کلی با ذخیره‌سازی اقتصادی

مثال: با استفاده از روش حذفی گاوس با محورگیری کلی با ذخیره‌سازی اقتصادی، ماتریس مقابل را به صورت $PAQ = U$ و $MAQ = U$ تجزیه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

K=1

$$\text{Row} = \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline 2 & - \end{array}$$

$$\text{Col} = \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline 3 & - \end{array}$$

$$1. \ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow r_1 = 2 \text{ and } c_1 = 3$$

$$(|a_{2,3}| = \max_{i,j=1,2,3} \{|a_{i,j}|\})$$

$$2. \ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(Interchange the rows 1 and 2)

$$3. \ A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(Interchange the columns 1 and 3)

$$4. \ A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(Form the multipliers)

$$5. \ A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

(Update the entries of A)

تجزیه LU با محورگیری کلی با ذخیره‌سازی اقتصادی

(ادامه)

مثال: با استفاده از روش حذفی گاوس با محورگیری کلی با ذخیره‌سازی اقتصادی، ماتریس مقابل را به صورت $PAQ = U$ تجزیه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

K=2

$$\text{Row} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Col} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$1. A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow r_2 = 3 \text{ and } c_2 = 3$$

$$(|a_{3,3}| = \max_{i,j=2,3} \{|a_{i,j}|\})$$

$$2. A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

(Interchange the rows 2 and 3)

$$3. A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

(Interchange the columns 2 and 3)

$$4. A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

(Form the multipliers)

$$5. A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(Update the entries of A)

تجزیه LU با محورگیری کلی با ذخیره‌سازی اقتصادی

(ادامه)

مثال: با استفاده از روش حذفی گاوس با محورگیری کلی با ذخیره‌سازی اقتصادی، ماتریس مقابل را به صورت $MAQ = U$ و $PAQ = LU$ تجزیه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{Row} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Col} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{aligned} P &= P_2 P_1 \\ Q &= Q_1 Q_2 \\ M &= M_2 P_2 M_1 P_1 \\ L &= P M^{-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \\ M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

تجزیه LU با محورگیری کلی با ذخیره سازی اقتصادی

تمرین: ماتریس و آرایه های زیر از اعمال روش تجزیه LU با محورگیری کلی با ذخیره سازی اقتصادی روی یک ماتریس به دست آمده است، ماتریس های جایگشت P_1 ، P_2 ، Q_1 و Q_2 ، تبدیل های مقدماتی M_1 و M_2 ، و ماتریس های M ، L و U را مشخص نمایید

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 1 & 8 & -1 \\ \frac{1}{2} & 3 & \frac{31}{8} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{31}{8} \end{bmatrix}$$

$$\text{Row} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Col} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

مراجع

1. Biswa Nath Datta, *Numerical Linear Algebra and Applications*, 1995.
2. Gilbert Strang, Fourth Edition, *Linear Algebra and Its Applications*, 2005
3. G.H. Golub, and C.F. Van Loan, **Matrix Computations**, 4rd Edition, Johns Hopkins University Press, 2013.
4. J. Demmel, **Applied Numerical Linear Algebra**, SIAM, 1997.
5. L.N. Trefthen, and Ill.D. Bau, **Numerical Linear Algebra**, SIAM, 1997.
6. <https://www.slideserve.com>
7. <https://www.math.usm.edu/lambers/mat610/sum10/lecture4.pdf>
8. <https://www.cl.cam.ac.uk/teaching/1314/NumMethods/supporting/Adjerid-Chapter3.pdf>
9. <https://www.cl.cam.ac.uk/teaching/1314/NumMethods>
10. https://learn.lboro.ac.uk/archive/olmp/olmp_resources/pages/workbooks_1_50_jan2008/Workbook30/30_3_lu_decomp.pdf