

به نام او، به یاد او، برای او

محاسبات علمی

حل دستگاه معادلات خطی

روش تجزیه LU با محورگیری جزئی

دکتر علی ولی نژاد

valinejad.ir

valinejad@umz.ac.ir

University of Mazandaran

تبدیل مقدماتی (تبدیل گاوسی، ماتریس مقدماتی)

تعریف تبدیل مقدماتی: چنان چه حداقل یکی از عناصر زیر قطر اصلی از یکی از ستون‌های ماتریس واحد را تغییر دهیم، ماتریس پایین مثلثی واحد حاصل را ماتریس مقدماتی (تبدیل مقدماتی یا تبدیل گاوسی) نامند.

تبدیل مقدماتی حاصل از تغییر ستون k ام ماتریس واحد:

$$M_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & m_{k+1,k} & \\ & & & m_{k+2,k} & \\ & & & \vdots & \\ & & & m_{n,k} & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$M_k = I + \tau^{(k)} e_k^T = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_{k+1,k} \\ m_{k+2,k} \\ \vdots \\ m_{n,k} \end{bmatrix} \underbrace{[0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T}_{e_k^T}$$

ویرایش‌های مختلف روش تجزیه LU

➤ روش تجزیه LU بدون محورگیری

$$A = LU$$

➤ روش تجزیه LU با محورگیری جزئی

$$PA = LU$$

➤ روش تجزیه LU با محورگیری کلی

$$PAQ = LU$$

تجزیه LU بدون محورگیری

مثال ۱: با استفاده از روش حذفی گاوس، تجزیه LU بدون محورگیری از ماتریس زیر را محاسبه کنید

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

مثال ۲: با استفاده از روش حذفی گاوس، تجزیه LU بدون محورگیری از ماتریس زیر را محاسبه کنید

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{(0)} := \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{(1)} = M_1 A^{(0)} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ U = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix} \Rightarrow A = LU$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

تجزیه LU بدون محورگیری

مثال ۳: با استفاده از روش حذفی گاوس، تجزیه LU بدون محورگیری از ماتریس زیر را محاسبه کنید

$$A = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(0)} := \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -10^{20} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{(1)} = M_1 A^{(0)} = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & 1 - 10^{20} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & -10^{20} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10^{20} & 1 \end{bmatrix}$$

$$U := A^{(1)} = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & -10^{20} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow LU = \begin{bmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq A$$

مشکل از کجاست؟

در حساب دقیق، هر ماتریس نامنفرد را می‌توان به صورت LU تجزیه نمود، اما در حساب ممیز شناور ممکن است عامل‌های تجزیه‌ی L و U با خطا همراه باشند. این موضوع به علت بسیار کوچک بودن عنصر محوری در گام اول، یعنی $a_{11}^{(0)} = 10^{-20}$ رخ می‌دهد. این عدد کوچک منجر به تولید ضربگر بزرگ $m_{11}^{(1)} = -10^{20}$ می‌شود. وقتی این عدد بزرگ برای به روز رسانی درایه $(2,2)$ از ماتریس $A^{(1)}$ به کار می‌رود سبب حذف عدد کوچک ۱ در محاسبه $1 - 10^{20}$ می‌شود.

تجزیه LU بدون محورگیری

مثال ۳: با استفاده از روش حذفی گاوس، تجزیه LU بدون محورگیری از ماتریس زیر را محاسبه کنید

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-20} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(0)} := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-20} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -10^{-20} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{(1)} = M_1 A^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 - 10^{-20} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10^{-20} & 1 \end{bmatrix}$$

$$U := A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow LU = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-20} & 1 \end{bmatrix} = A$$

ماتریس جایگشت

تعریف ماتریس جایگشت: ماتریسی که از جابجایی سطرهاى ماتریس واحد به دست میآید را ماتریس جایگشت نامند.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Px = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

تجزیه LU با محورگیری جزئی

قضیه (تجزیه LU با محورگیری جزئی، $PA = LU$): اگر روند حذفی گاوس (با محورگیری جزئی) با موفقیت روی ماتریس نامفرد $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ اعمال شود، آن گاه یک ماتریس جایگشت P ، یک ماتریس پایین مثلثی واحد L و یک ماتریس بالامثلثی U چنان وجود دارند که $PA = LU$.

اثبات (به صورت ساختاری):

گام ۰: قرار دهید $A^{(0)} := A$.

گام ۱:

الف) بزرگترین عنصر از لحاظ قدرمطلق در بین همه درایه های واقع در ستون اول و زیر قطری از ماتریس $A^{(0)}$ را پیدا کنید.

$$|a_{r1}^{(0)}| = \max \{ |a_{i1}^{(0)}| : i = 1, 2, \dots, n \}$$

ب) ماتریس جایگشت P_1 را از جابجا کردن سطرهای اول و r ام ماتریس واحد بسازید.

ج) ماتریس مقدماتی M_1 را چنان تشکیل دهید که عناصر زیر مولفه $(1,1)$ از ستون اول ماتریس $A^{(0)} := M_1 P_1 A^{(0)}$ صفر شوند

$$A^{(1)} = M_1 P_1 A^{(0)} = \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

تجزیه LU با محورگیری جزئی

(ادامه اثبات)

قضیه (تجزیه LU با محورگیری جزئی، $PA = LU$): اگر روند حذفی گاوس (با محورگیری جزئی) با موفقیت روی ماتریس نامفرد $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ اعمال شود، آن گاه یک ماتریس جایگشت P ، یک ماتریس پایین مثلثی واحد L و یک ماتریس بالامثلثی U چنان وجود دارند که $PA = LU$.

اثبات (به صورت ساختاری):

گام ۲:

الف) بزرگترین عنصر از لحاظ قدرمطلق در بین همه درایه های واقع در ستون دوم و زیر قطری از ماتریس $A^{(1)}$ را پیدا کنید.

$$|a_{r2}^{(1)}| = \max \{ |a_{i2}^{(1)}| : i = 2, 3, \dots, n \}$$

ب) ماتریس جایگشت P_2 را از جابجا کردن سطرهاى دوم و r ام ماتریس واحد بسازید.

ج) ماتریس مقدماتی M_2 را چنان تشکیل دهید که عناصر زیر مولفه $(2,2)$ از ستون دوم ماتریس $A^{(1)} := M_2 P_2 A^{(1)}$ صفر شوند

$$A^{(2)} = M_2 P_2 A^{(1)} = \begin{bmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ & * & * & \cdots & * \\ & & * & \cdots & * \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

تجزیه LU با محورگیری جزئی

(ادامه اثبات)

قضیه (تجزیه LU با محورگیری جزئی، $PA = LU$): اگر روند حذفی گاوس (با محورگیری جزئی) با موفقیت روی ماتریس نامنفرد $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ اعمال شود، آن گاه یک ماتریس جایگشت P ، یک ماتریس پایین مثلثی واحد L و یک ماتریس بالامثلثی U چنان وجود دارند که $PA = LU$.

اثبات (به صورت ساختاری):

گام k :

الف) بزرگترین عنصر از لحاظ قدرمطلق در بین همه درایه های واقع در ستون k ام و زیر قطری از ماتریس $A^{(k-1)}$ را پیدا کنید.

$$|a_{rk}^{(k-1)}| = \max \{ |a_{ik}^{(k-1)}| : i = k, k+1, \dots, n \}$$

ب) ماتریس جایگشت P_k را از جابجا کردن سطرهای k ام و r ام ماتریس واحد بسازید.

ج) ماتریس مقدماتی M_k را چنان تشکیل دهید که عناصر زیر مولفه (k, k) از ستون k ام ماتریس $A^{(k-1)} := M_k P_k A^{(k-1)}$ صفر شوند

$$A^{(k)} = M_k P_k A^{(k-1)} = \begin{bmatrix} * & * & * & \dots & * \\ & * & * & \dots & * \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & * & \dots & * \\ & & & & * & \dots & * \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & * & \dots & * \end{bmatrix}$$

تجزیه LU با محورگیری جزئی

(ادامه اثبات)

قضیه (تجزیه LU با محورگیری جزئی، $PA = LU$): اگر روند حذفی گاوس (با محورگیری جزئی) با موفقیت روی ماتریس نامنفرد $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ اعمال شود، آن گاه یک ماتریس جایگشت P ، یک ماتریس پایین مثلثی واحد L و یک ماتریس بالامثلثی U چنان وجود دارند که $PA = LU$.

اثبات (به صورت ساختاری):

گام $n-1$:

الف) بزرگترین عنصر از لحاظ قدرمطلق در بین همه درایه های واقع در ستون $n-1$ ام و زیر قطری از ماتریس $A^{(n-2)}$ را پیدا کنید.

$$|a_{r,n-1}^{(n-2)}| = \max \{ |a_{i,n-1}^{(n-2)}| : i = n-1, n \}$$

ب) ماتریس جایگشت P_{n-1} را از جابجا کردن سطرهای $n-1$ ام و r ام ماتریس واحد بسازید.

ب) ماتریس مقدماتی M_{n-1} را چنان تشکیل دهید که عناصر زیر مولفه $(n-1, n-1)$ از ستون $n-1$ ام ماتریس

$$A^{(n-1)} = M_{n-1} P_{n-1} A^{(n-2)}$$

$$A^{(n-1)} = M_{n-1} P_{n-1} A^{(n-2)} = \begin{bmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ & * & * & \cdots & * \\ & & * & \cdots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & * \end{bmatrix}$$

تجزیه LU با محورگیری جزئی

(ادامه اثبات)

قضیه (تجزیه LU با محورگیری جزئی، $PA = LU$): اگر روند حذفی گاوس (با محورگیری جزئی) با موفقیت روی ماتریس نامنفرد $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ اعمال شود، آن گاه یک ماتریس جایگشت P ، یک ماتریس پایین مثلثی واحد L و یک ماتریس بالامثلثی U چنان وجود دارند که $PA = LU$.

اثبات (به صورت ساختاری):

$$A^{(0)} := A$$

$$A^{(1)} = M_1 P_1 A^{(0)} = M_1 P_1 A$$

$$A^{(2)} = M_2 P_2 A^{(1)} = M_2 P_2 M_1 P_1 A$$

$\vdots$

$$A^{(n-1)} = M_{n-1} P_{n-1} A^{(n-2)} = M_{n-1} P_{n-1} M_{n-2} P_{n-2} \dots M_1 P_1 A$$

$$U := A^{(n-1)} = \underbrace{M_{n-1} P_{n-1} M_{n-2} P_{n-2} \dots M_1 P_1}_M A \quad \Rightarrow \quad U = MA$$

قضیه (تجزیه LU با محورگیری جزئی، $MA = U$): اگر روند حذفی گاوس (با محورگیری جزئی) با موفقیت روی ماتریس نامنفرد $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ اعمال شود، آن گاه یک ماتریس مقدماتی جایگشت یافته M و یک ماتریس بالامثلثی U چنان وجود دارند که $MA = U$.

تجزیه LU با محورگیری جزئی

(ادامه اثبات)

قضیه (تجزیه LU با محورگیری جزئی، $PA = LU$): اگر روند حذفی گاوس (با محورگیری جزئی) با موفقیت روی ماتریس نامنفرد $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ اعمال شود، آن گاه یک ماتریس جایگشت P ، یک ماتریس پائین مثلثی واحد L و یک ماتریس بالامثلثی U چنان وجود دارند که $PA = LU$.

اثبات (به صورت ساختاری):

$$U := A^{(n-1)} = \underbrace{M_{n-1}P_{n-1}M_{n-2}P_{n-2} \dots M_1P_1}_M A \quad \Rightarrow \quad U = MA$$

قرار دهید

$$P := P_{n-1}P_{n-2} \dots P_1$$

آن گاه:

$$L := PM^{-1}$$

در نتیجه:

$$PA = LU$$

تجزیه LU با محورگیری جزئی

شبه کد تجزیه LU با محورگیری جزئی

$$A^{(0)} = A$$

for $k=1:n-1$

find r_k such that $|a_{r_k,k}^{(k-1)}| = \max_{i=k,k+1,\dots,n} \{ |a_{i,k}^{(k-1)}| \}$ And save r_k .

if $a_{r_k,k} = 0$,
STOP.

$$P^{(k)} = \text{eye}(n, n)$$

Interchange the rows r_k and k of $P^{(k)}$: $p_{r_k,j}^{(k)} \leftrightarrow p_{k,j}^{(k)} \quad j = k, k+1, \dots, n$

$$M^{(k)} = \text{eye}(n, n)$$

$$T^{(k)} := P^{(k)} A^{(k-1)}$$

for $i=k+1:n$

$$m_{ik}^{(k)} = -\frac{t_{ik}^{(k)}}{t_{kk}^{(k)}}$$

$$A^{(k)} := M^{(k)} P^{(k)} A^{(k-1)}$$

$$U := A^{(n-1)}$$

$$M := M_{n-1} P_{n-1} M_{n-2} P_{n-2} \dots M_1 P_1$$

$$P := P_{n-1} P_{n-2} \dots P_1$$

$$L := P M^{-1}$$

$$MA = U$$

$$PA = LU$$

تجزیه LU با محورگیری جزئی

مثال: با استفاده از روش حذفی گاوس، ماتریس را به صورت $MA = U$ و $PA = LU$ تجزیه کنید

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{(0)} := \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$n=3 \rightarrow k=1,2$$

$$k=1$$

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow r_1 = \operatorname{argmax} \{ |a_{i1}^{(0)}| : i = 1, 2, 3 \} = \operatorname{argmax} \{ 2, 4, 1 \} = 2$$

$$\Rightarrow P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P_1 A^{(0)} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{-4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{-4} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{(1)} = M_1 P_1 A^{(0)} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & -1 \\ 0 & 3 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

تجزیه LU با محورگیری جزئی

(ادامه)

مثال: با استفاده از روش حذفی گاوس، ماتریس را به صورت $MA = U$ و $PA = LU$ تجزیه کنید

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$k=2$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & -1 \\ 0 & 3 & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow r_2 = \operatorname{argmax} \{ |a_{i2}^{(1)}| : i = 2, 3 \} = \operatorname{argmax} \{ 8, 3 \} = 2$$

$$\Rightarrow P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P_2 A^{(1)} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & -1 \\ 0 & 3 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{8} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{(2)} = M_2 P_2 A^{(1)} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{31}{8} \end{bmatrix}$$

تجزیه LU با محورگیری جزئی

(ادامه)

مثال: با استفاده از روش حذفی گاوس، ماتریس را به صورت $MA = U$ و $PA = LU$ تجزیه کنید

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{(0)} := \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{-4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{-4} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & -1 \\ 0 & 3 & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{8} & 1 \end{bmatrix}$$

$$U := A^{(2)} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{31}{8} \end{bmatrix}$$

$$U := A^{(2)}$$

$$M := M_2 P_2 M_1 P_1$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

$$MA = U$$

$$M := M_2 P_2 M_1 P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{16} & 1 \end{bmatrix}$$

تجزیه LU با محورگیری جزئی

(ادامه)

مثال: با استفاده از روش حذفی گاوس، ماتریس را به صورت $MA = U$ و $PA = LU$ تجزیه کنید

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{(0)} := \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{-4} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{-4} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & -1 \\ 0 & 3 & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{8} & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U := A^{(2)} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{31}{8} \end{bmatrix}$$

$$P := P_2 P_1 \\ L := PM^{-1}$$

$\Rightarrow$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$PA = LU$$

حل دستگاه معادلات خطی $Ax=b$ با استفاده از تجزیه $MA=U$

$$MA=U \xRightarrow{Ax=b} MAx=Mb=Ux \xRightarrow{b' := Mb} Ux = b'$$

الگوریتم حل دستگاه معادلات خطی $Ax=b$ با استفاده از تجزیه $MA=U$

گام ۱: محاسبه تجزیه $MA=U$

گام ۲: محاسبه $b' = Mb$

گام ۳: حل دستگاه بالا مثلی $Ux = b'$ با استفاده از روش جایگذاری پسرو

$$x_n = \frac{b'_n}{u_{nn}}$$
$$x_i = \frac{b'_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j}{u_{ii}}, \quad \text{for } i = n-1, \dots, 1$$

حل دستگاه معادلات خطی $Ax=b$ با استفاده از تجزیه $A=LU$

مثال: دستگاه مقابل را با استفاده از تجزیه $MA=U$ از ماتریس ضرائب حل کنید.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 6 \\ -4x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \end{aligned}$$

گام ۱: محاسبه تجزیه $MA=U$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{MA=U} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{16} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{31}{8} \end{bmatrix}$$

گام ۲: محاسبه $b' = Mb$

$$b' := Mb = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{16} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ \frac{31}{4} \end{bmatrix}$$

گام ۳: حل دستگاه بالا مثلثی $Ux = b'$ با استفاده از روش جایگذاری پسرو

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{31}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ \frac{31}{8} \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \frac{y_3}{u_{33}}$$

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{j=i+1}^3 u_{ij}x_j}{u_{ii}}, \text{ for } i=2,1$$



$$x_3 = 1$$

$$x_2 = 1$$

$$x_1 = 1$$

حل دستگاه معادلات خطی $Ax=b$ با استفاده از تجزیه $PA=LU$

$$PA=LU \quad \xRightarrow{Ax=b} \quad PAx = Pb=LUx \quad \xRightarrow{b' := Pb} \quad LUx = b' \quad \xRightarrow{y:=Ux} \quad Ly = b'$$

الگوریتم حل دستگاه معادلات خطی $Ax=b$ با استفاده از تجزیه $MA=U$

گام ۱: محاسبه تجزیه $PA=LU$

گام ۲: محاسبه $b' = Pb$

گام ۳: حل دستگاه پایین مثلثی $Ly = b'$ با استفاده از روش جایگذاری پیشرو

$$y_1 = \frac{b'_1}{l_{11}}$$
$$y_i = \frac{b'_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}x_j}{l_{ii}}, \quad \text{for } i = 2, 3, \dots, n$$

گام ۴: حل دستگاه بالا مثلثی $Ux = y$ با استفاده از روش جایگذاری پسرو

$$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}}$$
$$x_i = \frac{y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j}{u_{ii}}, \quad \text{for } i = n-1, \dots, 1$$

حل دستگاه معادلات خطی $Ax=b$ با استفاده از تجزیه $PA=LU$

تمرین: دستگاه مقابل را با استفاده از تجزیه $PA=LU$ از ماتریس ضرائب حل کنید.

$$2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 6$$

$$-4x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2$$

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

تجزیه LU با محورگیری جزئی با ذخیره‌سازی اقتصادی

با نگاهی به گام‌های الگوریتم تجزیه LU با محورگیری جزئی، می‌توان به نکات زیر اشاره کرد:

۱- میزان حافظه مورد نیاز برای ذخیره‌سازی ماتریس‌های جایگشت $P_1, P_2, \dots$ و P_{n-1} برابر $g(n-1)n^2$ واحد است، که در آن، g نشان دهنده میزان حافظه مورد نیاز برای ذخیره‌سازی یک درایه از هر ماتریس است.

۲- تعداد زیادی درایه صفر در ماتریس‌های جایگشت $P_1, P_2, \dots$ و P_{n-1} وجود دارند که میزان حافظه زیادی را از سیستم مصرف می‌کنند.

۳- میزان حافظه مورد نیاز برای ذخیره‌سازی تبدیل‌های مقدماتی $M_1, M_2, \dots$ و M_{n-1} برابر $g(n-1)n^2$ واحد است، که در آن، g نشان دهنده میزان حافظه مورد نیاز برای ذخیره‌سازی یک درایه از هر ماتریس است.

۴- با توجه به پایین مثلثی واحد بودن تبدیل‌های مقدماتی $M_1, M_2, \dots$ و M_{n-1} ، حافظه زیادی صرف ذخیره‌سازی درایه‌های صفر می‌شود.

۵- میزان حافظه مورد نیاز برای ذخیره‌سازی ماتریس‌های $A^{(0)}, A^{(1)}, \dots$ و $A^{(n-1)}$ برابر gn^3 واحد است. که در آن، g میزان حافظه مورد نیاز برای ذخیره‌سازی یک درایه از هر ماتریس است.

۶- بعد از اتمام گام k ام، همه درایه‌های واقع در زیر قطر اصلی از ستون‌های اول تا k ام ماتریس $A^{(k)}$ برابر صفرند.

۷- تعداد زیادی درایه صفر در ماتریس‌های $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots$ و $A^{(n-1)}$ وجود دارند که میزان حافظه زیادی را از سیستم مصرف می‌کنند.

تجزیه LU با محورگیری جزئی با ذخیره‌سازی اقتصادی

پیاده‌سازی تجزیه LU با محورگیری جزئی، حافظه زیادی را از سیستم به خود اختصاص می‌دهد. برای صرفجویی در حافظه، می‌توان به جای تشکیل ماتریس‌های $A^{(0)}, A^{(1)}, \dots, A^{(n-1)}$ ، همه محاسبات را روی ماتریس اولیه A انجام داد و تبدیل‌های مقدماتی $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ و ماتریس‌های L و U را به صورت ضمنی روی آن ذخیره نمود. به این منظور می‌توان در گام k از الگوریتم، داریه‌های $k+1$ ام تا n ام از بردار $\tau^{(k)}$ را به جای صفرهای واقع بر روی داریه‌های $k+1$ ام تا n ام از ستون k ام ماتریس A ذخیره نمود. همچنین، به جای ذخیره‌سازی کل داریه‌های ماتریس جایگشت P_k ، می‌توان با تعریف یک آرایه $n-1$ عضوی Row، شماره سطر جابجا شونده با سطر k ام، یعنی r_k ، را در اندیس k ام آن ذخیره نمود.

شبه کد تجزیه LU با محورگیری جزئی با ذخیره‌سازی اقتصادی

```
for  $k=1:n-1$   
   $r_k = \operatorname{argmax} \{ |a_{ik}|, \quad i = k, k+1, \dots, n \}$   
   $\text{Row}(k) = r_k$   
   $a_{r_k, j} \leftrightarrow a_{k, j} \quad j = k, k+1, \dots, n$   
  for  $i = k+1:n$   
     $a_{ik} := \tau_i^{(k)} = m_{ik}^{(k)} = -\frac{a_{ik}}{a_{kk}}$   
    for  $j = k+1:n$   
       $a_{ij} = a_{ij} + a_{ik}a_{kj}$ 
```

تجزیه LU با محورگیری جزئی با ذخیره‌سازی اقتصادی

پس از اتمام الگوریتم تجزیه LU با محورگیری جزئی با ذخیره‌سازی اقتصادی، عناصر بالامثلثی ماتریس نهایی A ، قسمت بالامثلثی ماتریس (بالامثلثی) U را تشکیل می‌دهند.

ماتریس جایگشت P_k را می‌توان با جابجایی سطرهای k ام و $\text{Row}(k)$ ام از ماتریس واحد ساخت.

تبدیل مقدماتی M_k را می‌توان براساس عناصر زیر قطر اصلی از ستون k ام از ماتریس نهایی A ساخت.

پس از محاسبه ماتریس‌های جایگشت و مقدماتی، ماتریس‌های P و L را می‌توان براساس تعریف آن‌ها محاسبه نمود.

تجزیه LU با محورگیری جزئی با ذخیره‌سازی اقتصادی

مثال: با استفاده از روش حذفی گاوس با محورگیری جزئی با ذخیره‌سازی اقتصادی، ماتریس ضرائب دستگاه مقابل را به صورت $MA = LU$ و $PA = LU$ تجزیه کنید.

$$2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 6$$

$$-4x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2$$

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

$$n=3 \rightarrow k=1,2$$

$$\text{Row} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline r_1 & r_2 \\ \hline \end{array}$$

$k=1$

$$\text{Row} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 = \text{argmax} \{|a_{i1}|, i=1,2,3\} = 2} A = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{a_{i1} = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}, i=2:3} \begin{cases} a_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{2}{-4} = \frac{1}{2} \\ a_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}} = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ \frac{1}{2} & 6 & -2 \\ \frac{1}{4} & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{a_{ij} = a_{ij} + a_{ik}a_{kj}, i,j=k+1:n} \begin{cases} a_{22} = a_{22} + a_{21}a_{12} = 6 + \left(\frac{1}{2}\right)4 = 8 \\ a_{23} = a_{23} + a_{21}a_{13} = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)2 = -1 \\ a_{32} = a_{32} + a_{31}a_{12} = 2 + \left(\frac{1}{4}\right)4 = 3 \\ a_{33} = a_{33} + a_{31}a_{13} = 3 + \left(\frac{1}{4}\right)2 = \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ \frac{1}{2} & 8 & -1 \\ \frac{1}{4} & 3 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

تجزیه LU با محورگیری جزئی با ذخیره‌سازی اقتصادی

(ادامه)

مثال: با استفاده از روش حذفی گاوس با محورگیری جزئی با ذخیره‌سازی اقتصادی، ماتریس ضرائب دستگاه مقابل را به صورت $MA = LU$ و $PA = LU$ تجزیه کنید.

$$2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 6$$

$$-4x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2$$

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

$$n=3 \rightarrow k=1,2$$

$$\text{Row} = \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 2 & r_2 \end{array}$$

$k=2$

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 1 & 8 & -1 \\ 1 & 7 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Row} = \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 2 & 2 \end{array}, r_2 = \arg\max \{|a_{i2}|, i=2,3\} = 2} A = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 1 & 8 & -1 \\ 1 & 7 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$a_{i2} = -\frac{a_{i2}}{a_{22}} \xrightarrow{i=3} a_{33} = -\frac{a_{32}}{a_{22}} = -\frac{3}{8} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 1 & 8 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{8} & 7 \\ 4 & -\frac{3}{8} & 2 \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = a_{ij} + a_{ik}a_{kj} \xrightarrow{i,j=k+1:n} a_{33} = a_{33} + a_{32}a_{23} = \frac{7}{2} + \left(-\frac{3}{8}\right)(-1) = \frac{31}{8}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 1 & 8 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{8} & \frac{31}{8} \\ 4 & -\frac{3}{8} & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Row} = \begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 2 & 2 \end{array}$$

تجزیه LU با محورگیری جزئی با ذخیره‌سازی اقتصادی

(ادامه)

مثال: با استفاده از روش حذفی گاوس با محورگیری جزئی با ذخیره‌سازی اقتصادی، ماتریس ضرائب دستگاه مقابل را به صورت $MA = LU$ و $MA = U$ تجزیه کنید.

$$2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 6$$

$$-4x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2$$

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 1 & 8 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{8} & \frac{31}{8} \end{bmatrix} \Rightarrow U = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{31}{8} \end{bmatrix} \quad M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ +\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ +\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{8} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Row} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} \Rightarrow P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M := M_2 P_2 M_1 P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{16} & 1 \end{bmatrix}$$

⇓

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow MA = U$$

تذکر مهم: A در این فرمول، همان ماتریس ضرائب دستگاه بالا می‌باشد.

تجزیه LU با محورگیری جزئی با ذخیره‌سازی اقتصادی

(ادامه)

مثال: با استفاده از روش حذفی گاوس با محورگیری جزئی با ذخیره‌سازی اقتصادی، ماتریس ضرائب دستگاه مقابل را به صورت $MA = LU$ و $PA = LU$ تجزیه کنید.

$$2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 6$$

$$-4x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2$$

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 1 & 8 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{8} & \frac{31}{8} \end{bmatrix} \Rightarrow U = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{31}{8} \end{bmatrix} \quad M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ +\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ +\frac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{8} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Row} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} \Rightarrow P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P := P_2 P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{16} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow L := PM^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{PA = LU}$$

تذکر مهم: A در این فرمول، همان ماتریس ضرائب دستگاه بالا می‌باشد.

تجزیه LU بدون محورگیری با ذخیره سازی اقتصادی

تمرین: ماتریس و بردار زیر از اعمال روش تجزیه LU با محورگیری جزئی با ذخیره سازی اقتصادی روی یک ماتریس به دست آمده است، ماتریس های جایگشت P_1 و P_2 ، تبدیل های مقدماتی M_1 و M_2 ، و ماتریس های M ، L و U را مشخص نمایید

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 2 \\ \frac{1}{2} & 8 & -1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{31}{8} \end{bmatrix}$$

$$\text{Row} = \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

مراجع

1. Biswa Nath Datta, *Numerical Linear Algebra and Applications*, 1995.
2. Gilbert Strang, Fourth Edition, *Linear Algebra and Its Applications*, 2005
3. G.H. Golub, and C.F. Van Loan, **Matrix Computations**, 4rd Edition, Johns Hopkins University Press, 2013.
4. J. Demmel, **Applied Numerical Linear Algebra**, SIAM, 1997.
5. L.N. Trefthen, and Ill.D. Bau, **Numerical Linear Algebra**, SIAM, 1997.
6. <https://www.slideserve.com>
7. <https://www.math.usm.edu/lambers/mat610/sum10/lecture4.pdf>
8. <https://www.cl.cam.ac.uk/teaching/1314/NumMethods/supporting/Adjerid-Chapter3.pdf>
9. <https://www.cl.cam.ac.uk/teaching/1314/NumMethods>
10. https://learn.lboro.ac.uk/archive/olmp/olmp_resources/pages/workbooks_1_50_jan2008/Workbook30/30_3_lu_decomp.pdf