

به نام او، به یاد او، برای او

محاسبات علمی

حل دستگاه معادلات خطی

روش تجزیه LU بدون محورگیری

دکتر علی ولی نژاد

valinejad.ir

valinejad@umz.ac.ir

University of Mazandaran

فهرست مطالب

- ۱- دستگاه معادلات خطی
- ۲- روش حذفی گاوس
- ۳- روش تجزیه LU
- ۴- تبدیل مقدماتی
- ۵- تجزیه LU بدون محورگیری

دستگاه معادلات خطی

دستگاه معادلات خطی با m معادله و n مجهول:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$$

شکل ماتریسی دستگاه معادلات خطی با m معادله و n مجهول:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_b$$

$$Ax = b$$

روش حذفی گاوس ساده

روش حذفی گاوس، برای حل دستگاه $Ax = b$ ، با انجام دوگام اصلی زیر آن را به یک دستگاه هم ارزی تبدیل می‌کند که پیدا کردن جواب آن آسانتر است.

گام ۱: تشکیل ماتریس افزوده

گام ۲: تبدیل ماتریس افزوده به یک ماتریس تحویل شده سطری پلکانی

روش حذفی گاوس، یک دستگاه معادلات خطی با n معادله و n مجهول را در $n-1$ گام به یک دستگاه بالا مثلثی هم ارز تبدیل می‌کند (در گام k ام، عناصر زیر قطر از ستون k ام از ماتریس ضرائب صفر می‌شوند).

مزایا و معایب

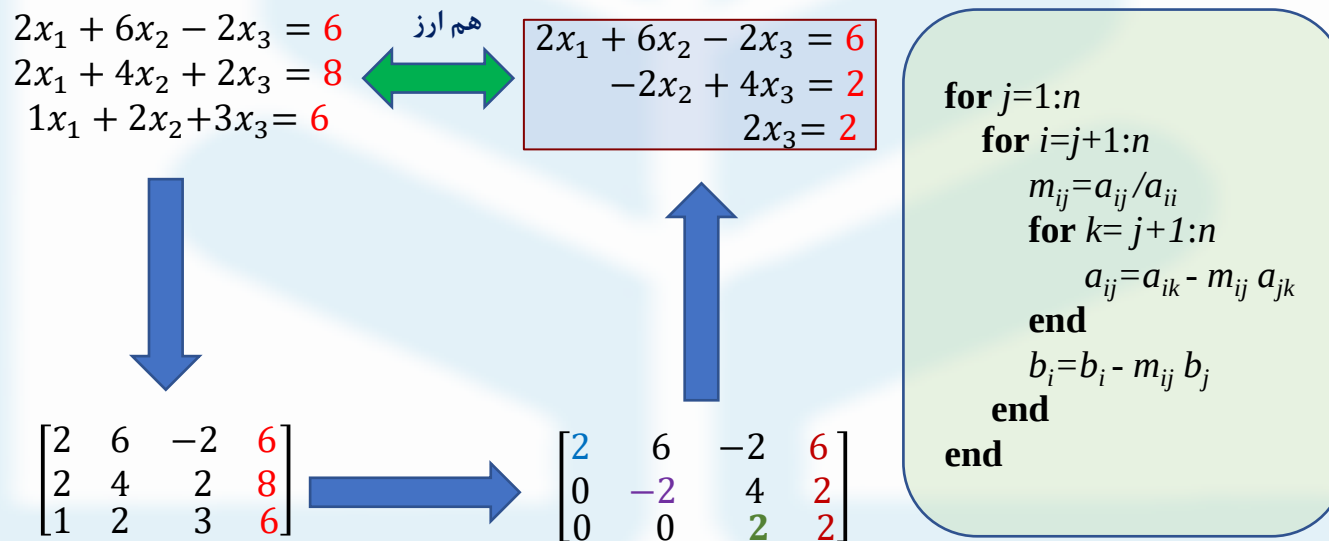
- ❖ بیان ریاضی ساده
- ❖ انجام محاسبات به صورت دستی می‌تواند بسیار پیچیده باشد.
- ❖ خطای گرد کردن روش حذفی گاوس ساده می‌تواند بسیار قابل توجه باشد.
- ❖ با توجه به این که در روند حذفی گاوس ساده برای حل دستگاه $Ax=b$ ماتریس ضرائب و بردار سمت راست به طور همزمان در داخل یک حلقه تغییر می‌کنند، در صورت تغییر بردار سمت راست، کل محاسبات باید از ابتدا انجام گیرد.

نکته:

با استفاده از تکنیک‌هایی مثل مقیاس‌بندی یا محورگیری می‌توان تاحدی خطای گرد کردن حاصل از روش حذفی گاوس را کاهش داد

روش حذفی گاوس ساده

مثال: با استفاده از روش حذفی گاوس دستگاه زیر را به یک دستگاه بالا مثلثی هم ارز تبدیل نمایید.



نکته:

شرط اتمام الگوریتم جایگزینی پسرو در این است که عناصر قطری ماتریس بالا مثلثی همگی غیر صفر باشند. چنانچه حداقل یکی از عناصر قطری صفر باشد، دترمینان ماتریس ضرائب صفر می شود و در نتیجه دستگاه $Ax=b$ جواب منحصر بفرد نخواهد داشت.

روش تجزیه LU

با توجه به این که در روند حذفی گاوس ساده برای حل دستگاه $Ax=b$ ، ماتریس ضرائب و بردار سمت راست به طور همزمان در داخل یک حلقه تغییر می کنند، در صورت تغییر بردار سمت راست، کل محاسبات باید از ابتدا انجام گیرد.

از آن جا که بردار سمت راست هیچ تاثیری در عملیات بالا مثلثی سازی ماتریس ضرائب ندارد، با یکبار ذخیره سازی محاسبات انجام شده در روند بالامثلثی سازی ماتریس ضرائب، می توان چندین دستگاه معادلات خطی با ماتریس ضرائب یکسان را همزمان حل نمود.

یک راه برای ذخیره سازی محاسبات انجام شده در روند بالامثلثی سازی ماتریس ضرائب، استفاده از روش تجزیه LU است.

در تجزیه LU ، ماتریس ضرائب به صورت حاصلضرب یک ماتریس پایین مثلثی در یک ماتریس بالامثلثی تجزیه می شود. البته، در بعضی از ویرایش های تجزیه LU ، ماتریسی موسوم به ماتریس جایگشت در این حاصلضرب ظاهر می شود.

ویرایش‌های مختلف روش تجزیه LU

➤ روش تجزیه LU بدون محورگیری

$$A = LU$$

➤ روش تجزیه LU با محورگیری جزئی

$$PA = LU$$

➤ روش تجزیه LU با محورگیری کلی

$$PAQ = LU$$

تبدیل مقدماتی (تبدیل گاوسی، ماتریس مقدماتی)

تعریف تبدیل مقدماتی: چنان چه حداقل یکی از عناصر زیر قطر اصلی از یکی از ستون‌های ماتریس واحد را تغییر دهیم، ماتریس پایین مثلثی واحد حاصل را ماتریس مقدماتی (تبدیل مقدماتی یا تبدیل گاوسی) نامند.

تبدیل مقدماتی حاصل از تغییر ستون k ام ماتریس واحد:

$$M_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & m_{k+1,k} & \\ & & & m_{k+2,k} & \\ & & & \vdots & \\ & & & m_{n,k} & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$M_k = I + \tau^{(k)} e_k^T = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ m_{k+1,k} \\ m_{k+2,k} \\ \vdots \\ m_{n,k} \end{bmatrix} \underbrace{[0 \quad \cdots \quad 0 \quad e_k^T \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T}_{\tau^{(k)}}$$

تبدیل مقدماتی (تبدیل گاوسی، ماتریس مقدماتی)

مثال: ماتریس های زیر تبدیل های مقدماتی هستند

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تمرین:

۱- ثابت کنید که ماتریس مقدماتی $M_k = I + \tau^{(k)} e_k^T$ معکوس پذیر است و

$$M_k^{-1} = I - \tau^{(k)} e_k^T$$

۲- ثابت کنید حاصلضرب دو ماتریس پایین مثلثی واحد، ماتریسی پایین مثلثی واحد است.

۳- ثابت کنید حاصلضرب دو ماتریس مقدماتی، یک ماتریس پایین مثلثی واحد است.

۴- معکوس یک ماتریس مقدماتی، ماتریسی مقدماتی است.

۵- ثابت کنید:

$$M_k M_k^{-1} = I - \tau^{(k)} e_k^T \tau^{(k)} e_k^T$$

۶- ثابت کنید:

$$M_{k-1}^{-1} M_k^{-1} = I + \tau^{(k-1)} e_{k-1}^T + \tau^{(k)} e_k^T$$

تبدیل مقدماتی (تبدیل گاوسی، ماتریس مقدماتی)

لم: فرض کنید $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ آن گاه اگر $x_1 \neq 0$ ، ماتریس مقدماتی M چنان وجود دارد که

$$Mx = \alpha e_1$$

α عددی حقیقی است.

اثبات:

کافیست تعریف کنیم

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -\frac{x_2}{x_1} & 1 & & & \\ -\frac{x_3}{x_1} & & \ddots & & \\ -\frac{x_n}{x_1} & & & 1 & \end{bmatrix}$$

آن گاه $Mx = \alpha e_1$ که $\alpha = x_1$

تبدیل مقدماتی (تبدیل گاوسی، ماتریس مقدماتی)

$$Mx = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{لم: بردار } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ مفروض است. اگر } x_k \neq 0, \text{ ماتریس مقدماتی } M \text{ را چنان بیابید که}$$

جواب: کافیت تعریف کنیم

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ \text{سطر } k \text{ ام} \rightarrow & & & 1 & & & \\ & & & -\frac{x_{k+1}}{x_k} & & & \\ & & & -\frac{x_{k+2}}{x_k} & & & \\ & & & -\frac{x_k}{x_k} & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & -\frac{x_n}{x_k} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & \end{bmatrix}$$

ستون k ام

$$m_{ik} = -\frac{x_i}{x_k} \quad i = k+1:n$$

ضربگر

تجزیه LU بدون محورگیری

قضیه (تجزیه LU بدون محورگیری): اگر روند حذفی گاوس (بدون محورگیری) با موفقیت روی ماتریس نامنفرد $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ اعمال شود، آن گاه یک ماتریس پایینی مثلثی واحد L و یک ماتریس بالامثلثی U چنان وجود دارند که $A = LU$.

اثبات (وجود):

قرار دهید $A^{(0)} := A$

می‌دانیم روش حذفی گاوس در صورت موفقیت، در $n-1$ گام متوالی ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ را به یک ماتریس بالامثلثی U تبدیل می‌کند. فرض کنید ماتریس ضرائب حاصل از گام k ام از روش حذفی گاوس را با $A^{(k)}$ نشان دهیم.

ماتریس $A^{(k)}$ ، $k = 1, 2, \dots, n-1$ را می‌توان با ضرب ماتریس مقدماتی $M_k = I + \tau^{(k)} e_k^T$ در ماتریس ضرائب بدست آمده از مرحله قبلی، یعنی $A^{(k-1)}$ ، به صورت زیر محاسبه نمود،

$$A^{(k)} = M_k A^{(k-1)}$$

که در آن،

$$\tau^{(k)} = [\tau_1^{(k)}, \tau_2^{(k)}, \dots, \tau_n^{(k)}]^T \quad \tau_i^{(k)} := m_{ik}^{(k)} := \begin{cases} 0 & i \leq k \\ -\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} & i = k+1:n \end{cases}$$

$$e_k = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T$$

↑
درایه k ام

بنابراین $n-1$ گام متوالی روش حذفی گاوس را می‌توان به صورت زیر مرتب نمود:

$$A^{(1)} = M_1 A^{(0)}$$

$$A^{(2)} = M_2 A^{(1)} = M_2 M_1 A^{(0)} = M_2 M_1 A$$

$\vdots$

$$A^{(n-1)} = M_{n-1} A^{(n-2)} = M_{n-1} M_{n-2} \dots M_1 A \Rightarrow U := A^{(n-1)} \Rightarrow \boxed{U = M_{n-1} M_{n-2} \dots M_1 A}$$

تجزیه LU بدون محورگیری

(ادامه اثبات)

قضیه (تجزیه LU بدون محورگیری): اگر روند حذفی گاوس (بدون محورگیری) با موفقیت روی ماتریس نامنفرد $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ اعمال شود، آن گاه یک ماتریس پایین مثلثی واحد L و یک ماتریس بالامثلثی U چنان وجود دارند که $A = LU$.

ادامه اثبات (وجود):

$$U = M_{n-1}M_{n-2} \dots M_1A$$

ماتریس‌های مقدماتی معکوس پذیرند و $M_k^{-1} = I - \tau^{(k)}e_k^T$ بنابراین

$$\Rightarrow A = (M_{n-1}M_{n-2} \dots M_1)^{-1}U$$

$$\Rightarrow A = (M_1^{-1}M_2^{-1} \dots M_{n-1}^{-1})U$$

$$\Rightarrow A = (I - \tau^{(1)}e_1^T)(I - \tau^{(2)}e_2^T) \dots (I - \tau^{(n-1)}e_{n-1}^T)U$$

$$M_{k-1}^{-1}M_k^{-1} = I - \tau^{(k-1)}e_{k-1}^T - \tau^{(k)}e_k^T$$

$$A = \left(I - \sum_{k=1}^{n-1} \tau^{(k)}e_k^T \right) U$$

$$L := I - \sum_{k=1}^{n-1} \tau^{(k)}e_k^T \quad \text{ماتریس } L - \sum_{k=1}^{n-1} \tau^{(k)}e_k^T \text{، یک ماتریس پایین مثلثی واحد است. تعریف می کنیم}$$

$$\Rightarrow A = LU$$

تجزیه LU بدون محورگیری

(ادامه اثبات)

قضیه (تجزیه LU بدون محورگیری): اگر روند حذفی گاوس (بدون محورگیری) با موفقیت روی ماتریس نامنفرد $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ اعمال شود، آن گاه یک ماتریس پایین مثلثی واحد L و یک ماتریس بالامثلثی U چنان وجود دارند که $A = LU$.

ادامه اثبات (یکتایی):

فرض کنید دو تجزیه $A = L_1 U_1$ و $A = L_2 U_2$ برای ماتریس A وجود داشته باشد. در این صورت،

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(L_1) \det(U_1) \neq 0 & \det(U_1) &\neq 0 \\ \det(A) &= \det(L_2) \det(U_2) \neq 0 & \det(U_2) &\neq 0 \end{aligned}$$

$$L_1 U_1 = L_2 U_2 \implies L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1}$$

ماتریس پایین مثلثی واحد
ماتریس بالامثلثی

$$\implies L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1} = I \implies \begin{aligned} L_1 &= L_2 \\ U_1 &= U_2 \end{aligned}$$

بنابراین تجزیه $A = LU$ منحصر بفرد است. ■

نکته:

- ۱- حاصلضرب دو ماتریس پایین مثلثی واحد، ماتریسی پایین مثلثی واحد است.
- ۲- حاصلضرب دو ماتریس بالا مثلثی، ماتریسی بالا مثلثی است.
- ۳- معکوس یک ماتریس بالا (پایین) مثلثی، ماتریسی بالا (پایین) مثلثی است.
- ۴- معکوس یک ماتریس پایین مثلثی واحد، ماتریسی پایین مثلثی واحد است.

اثبات قضیه تجزیه LU بدون محورگیری به صورت ساختاری

اثبات (وجود):

گام ۰: قرار دهید $A^{(0)} := A$.

گام ۱: ماتریس مقدماتی M_1 را چنان تشکیل دهید که عناصر زیر مولفه $(1,1)$ از ستون اول ماتریس $A^{(1)} = M_1 A^{(0)}$ صفر شود

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -\frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} & 1 & & & \\ -\frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} & & \ddots & & \\ -\frac{a_{n1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{(1)} = M_1 A^{(0)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

گام ۲: ماتریس مقدماتی M_2 را چنان تشکیل دهید که عناصر زیر مولفه $(2,2)$ از ستون دوم ماتریس $A^{(2)} = M_2 A^{(1)}$ صفر شود

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ -\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & & 1 & & \\ -\frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & & & \ddots & \\ -\frac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{(2)} = M_2 A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ & & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & a_{3n}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}$$

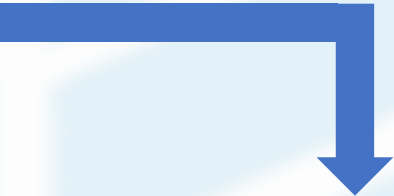
$$A^{(2)} = M_2 A^{(1)} = M_2 M_1 A^{(0)}$$

اثبات قضیه تجزیه LU بدون محورگیری به صورت ساختاری

اثبات (وجود):

گام k ام: ماتریس مقدماتی M_k را چنان تشکیل دهید که عناصر زیر مولفه (k,k) از ستون k ام ماتریس $A^{(k-1)} = M_k A^{(k-1)}$ صفر شود

(ادامه)

$$M_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & -\frac{a_{k+1,k}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}} & \\ & & & \vdots & \\ & & & -\frac{a_{n,k}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}} & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$


$$A^{(k)} = M_k A^{(k-1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & a_{k,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{k,n}^{(k-1)} \\ & & & & a_{k+1,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k)} \\ & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & & a_{n,k+1}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$A^{(k)} = M_k A^{(k-1)} = M_k M_{k-1} \cdots M_1 A^{(0)}$$

اثبات قضیه تجزیه LU بدون محورگیری به صورت ساختاری

اثبات (وجود):

(ادامه)

گام n-1: ماتریس مقدماتی M_{n-1} را چنان تشکیل دهید که عناصر زیر مولفه $(n-1, n-1)$ از ستون n-1 ام ماتریس $A^{(n-1)} = M_{n-1}A^{(n-2)}$ صفر شود

$$U := A^{(n-1)} = M_{n-1}A^{(n-2)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ & & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

$$U = A^{(n-1)} = M_{n-1}A^{(n-2)} = M_{n-1}M_{n-2} \dots M_1A^{(0)}$$

ماتریس‌های مقدماتی معکوس پذیرند و $M_k^{-1} = I - \tau^{(k)}e_k^T$ ، بنابراین



$$A = (M_{n-1}M_{n-2} \dots M_1)^{-1}U$$



$$A = \left(I - \sum_{k=1}^{n-1} \tau^{(k)}e_k^T \right) U$$

ماتریس $I - \sum_{k=1}^{n-1} \tau^{(k)}e_k^T$ ، یک ماتریس پایین مثلثی واحد است. تعریف می‌کنیم $L := I - \sum_{k=1}^{n-1} \tau^{(k)}e_k^T$



$$A = LU$$

■ اثبات یکتایی تجزیه همانند قبل است.

تجزیه LU بدون محورگیری

شبه کد تجزیه LU بدون محورگیری

$$A^{(0)} = A$$

for $k=1:n-1$

$$\tau_i^{(k)} := \begin{cases} 0 & i \leq k \\ -\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} & i = k+1:n \end{cases}$$

$$M_k = I + \tau^{(k)} e_k^T$$

$$A^{(k)} = M^{(k)} A^{(k-1)}$$

$$U := A^{(n-1)}$$

$$L := M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_{n-1}^{-1}$$

تجزیه LU بدون محورگیری

الگوریتم محاسبه $A^{(k)} = M^{(k)} A^{(k-1)}$ بدون ساخت ماتریس $M^{(k)}$:

گام ۰: ماتریس $A^{(k)}$ را با درایه‌های صفر بسازید.

گام ۱: سطرهای اول تا k ام ماتریس $A^{(k-1)}$ را به ترتیب در سطرهای اول تا k ام ماتریس $A^{(k)}$ کپی کنید.

گام ۲: درایه‌های واقع در پایین‌ترین و سمت راست‌ترین زیرماتریس $(n-k)$ در $(n-k)$ از ماتریس $A^{(k)}$ را با استفاده از فرمول زیر به هنگام کنید.

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} + m_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k-1)} \quad i, j = k+1, k+2, \dots, n$$

$$m_{ik}^{(k)} = -\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad i, j = k+1, k+2, \dots, n$$

تجزیه LU بدون محورگیری

محاسبه صریح ماتریس **L** با استفاده از ماتریس های مقدماتی:

$$L := M_1^{-1} M_2^{-1} \dots M_{n-1}^{-1} = I - \sum_{k=1}^{n-1} \tau^{(k)} e_k^T = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -\tau_2^{(1)} & 1 & & & \\ -\tau_3^{(1)} & -\tau_3^{(2)} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ -\tau_n^{(1)} & -\tau_n^{(2)} & \dots & -\tau_n^{(n-1)} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tau_i^{(k)} = \underset{\text{ضربگر}}{m_{ik}^{(k)}} := -\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad \begin{matrix} k = 1:n-1 \\ i = k+1:n \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \rightarrow & M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ +5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} & \rightarrow & M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & +3 & 1 \end{bmatrix} & \rightarrow & L := M_1^{-1} M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

تجزیه LU بدون محورگیری

شبه کد محاسبه صریح ماتریس **L** با استفاده از ماتریس های مقدماتی:

$L = \text{eye}(n, n)$

for $k = 1:n-1$

for $i = k+1:n$

$$l_{ik} := -\tau_i^{(k)} = -m_{ik}^{(k)} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -m_{21}^{(1)} & 1 & & & \\ -m_{31}^{(1)} & -m_{32}^{(2)} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ -m_{n1}^{(1)} & -m_{n2}^{(2)} & \cdots & -m_{n,n-1}^{(n-1)} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tau_i^{(k)} = m_{ik}^{(k)} = -\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

$$k = 1:n-1$$

$$i = k+1:n$$

تجزیه LU بدون محورگیری

شبه کد تجزیه LU بدون محورگیری

```
 $A^{(0)} = A$   
for  $k = 1:n-1$   
   $A^{(k)} = \text{zeros}(n,n)$   
   $M^{(k)} = \text{eye}(n,n)$   
  for  $i = 1:k$   
    for  $j = 1:n$   
       $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)}$   
    for  $i = k+1:n$   
       $m_{ik}^{(k)} = -\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$   $m_{ik}^{(k)}$  درایه واقع بر سطر  $i$  ام و ستون  $k$  ام از ماتریس  $M^{(k)}$  است.  
      for  $j = k+1:n$   
         $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} + m_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k-1)}$ 
```

$U := A^{(n-1)}$

$$\tau_i^{(k)} = -m_{ik}^{(k)} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

تجزیه LU بدون محورگیری

$$2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 6$$

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8$$

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$

$$A^{(0)} := \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$n=3 \rightarrow k=1,2$$

K=1

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{(1)} = M_1 A^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

K=2

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{-2} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{(2)} = M_2 A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow U := A^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow L := M_1^{-1} M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = LU$$

مراجع

1. Biswa Nath Datta, ***Numerical Linear Algebra and Applications***, 1995.
2. Gilbert Strang, Fourth Edition, ***Linear Algebra and Its Applications***, 2005
3. G.H. Golub, and C.F. Van Loan, ***Matrix Computations***, 4rd Edition, Johns Hopkins University Press, 2013.
4. J. Demmel, ***Applied Numerical Linear Algebra***, SIAM, 1997.
5. L.N. Trefthen, and Ill.D. Bau, ***Numerical Linear Algebra***, SIAM, 1997.
6. <https://www.slideserve.com>
7. <https://www.math.usm.edu/lambers/mat610/sum10/lecture4.pdf>
8. <https://www.cl.cam.ac.uk/teaching/1314/NumMethods/supporting/Adjerid-Chapter3.pdf>
9. <https://www.cl.cam.ac.uk/teaching/1314/NumMethods>
10. https://learn.lboro.ac.uk/archive/olmp/olmp_resources/pages/workbooks_1_50_jan2008/Workbook30/30_3_lu_decomp.pdf